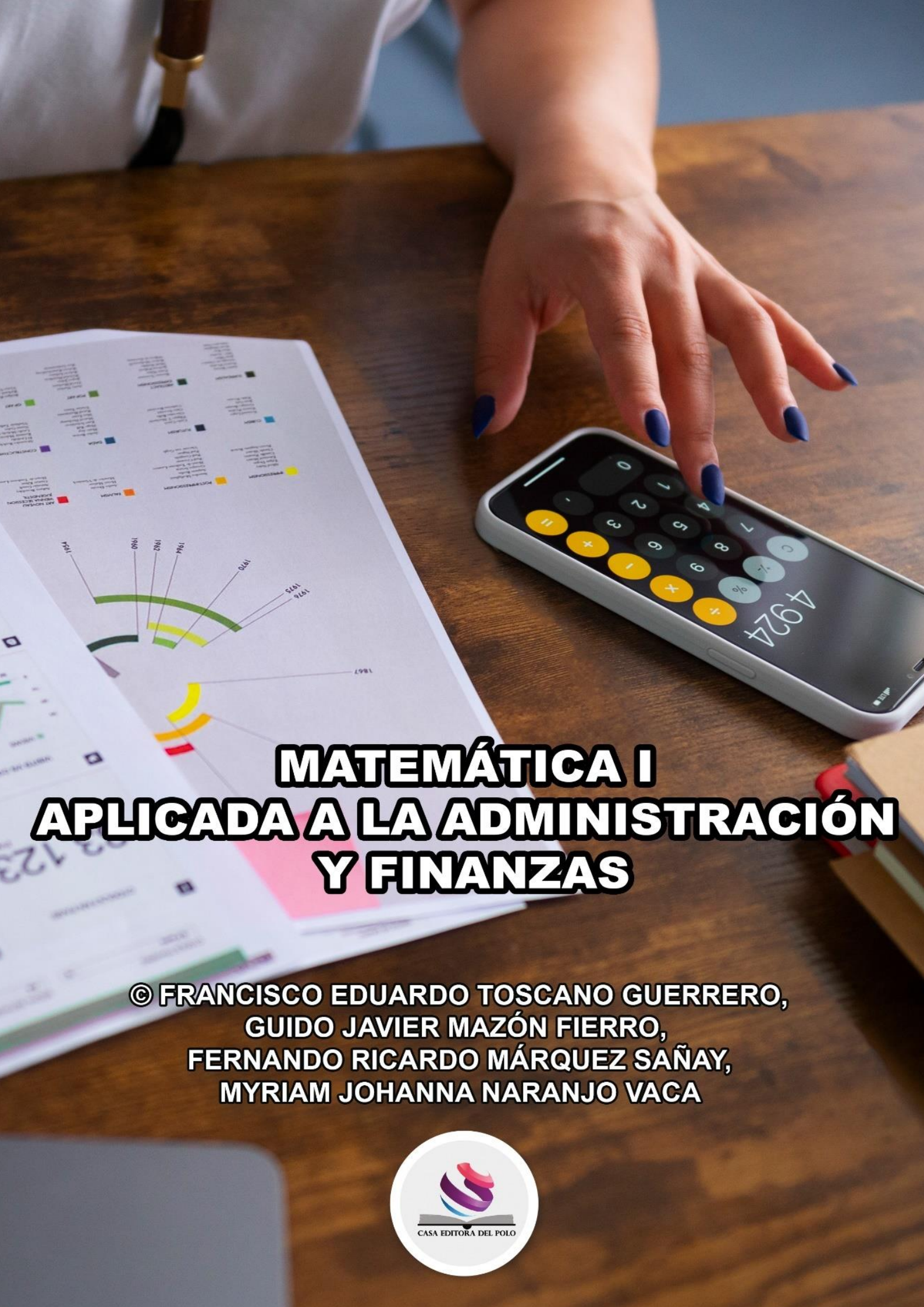




MATEMÁTICA I APLICADA A LA ADMINISTRACIÓN Y FINANZAS

**© FRANCISCO EDUARDO TOSCANO GUERRERO,
GUIDO JAVIER MAZÓN FIERRO,
FERNANDO RICARDO MÁRQUEZ SAÑAY,
MYRIAM JOHANNA NARANJO VACA**



MATEMÁTICA I APLICADA A LA ADMINISTRACIÓN Y FINANZAS

© Francisco Eduardo Toscano Guerrero
Guido Javier Mazón Fierro
Fernando Ricardo Márquez Sañay
Myriam Johanna Naranjo Vaca



© Autores

© Francisco Eduardo Toscano Guerrero
Magister en Docencia Universitaria y
Administración Educativa, Especialista en
Gestión y Desarrollo de Instituciones
Educativas, Diploma Superior en Liderazgo
Institucional, Magister en Matemática
Aplicada, Docente de la Escuela Superior
Politécnica de Chimborazo – ESPOCH.

Guido Javier Mazón Fierro
Ingeniero Mecánico, Diploma Superior en
Gestión Cultural, Magister en Desarrollo de la
Inteligencia y Educación, Master Universitario
en Ingeniería Matemática y Computación,
Docente de la Escuela Superior Politécnica de
Chimborazo – ESPOCH.

Fernando Ricardo Márquez Sañay
Ingeniero Mecánico, Master Universitario en
Ingeniería Matemática y Computación,
Docente de la Escuela Superior Politécnica de
Chimborazo – ESPOCH.

Myriam Johanna Naranjo Vaca
Ingeniera en Contabilidad y Auditoría CPA,
Master Universitario en Dirección y
Administración de Empresas / Master In
Business Administration (MBA), Magister en
Contabilidad y Auditoría Mención Gestión
Tributaria, Magister en Auditoria
Gubernamental y Control, Docente de la
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo –
ESPOCH.

Casa Editora del Polo - CASEDELPO CIA. LTDA.
Departamento de Edición

Editado y distribuido por:

Editorial: Casa Editora del Polo
Sello Editorial: 978-9942-816
Manta, Manabí, Ecuador. 2019
Teléfono: (05) 6051775 / 0991871420
Web: www.casedelpo.com
ISBN: 978-9942-621-64-1
DOI: <https://doi.org/10.23857/978-9942-621-64-1>

© Primera edición
© Enero 2024
Impreso en Ecuador

Revisión, Ortografía y Redacción:
Lic. Jessica Mero Vélez

Diseño de Portada:
Michael Josué Suárez-Espinar

Diagramación:
Ing. Edwin Alejandro Delgado-Veliz

Director Editorial:
Dra. Tibusay Milene Lamus-García

Todos los libros publicados por la Casa Editora del Polo son sometidos previamente a un proceso de evaluación realizado por árbitros calificados. Este es un libro digital y físico, destinado únicamente al uso personal y colectivo en trabajos académicos de investigación, docencia y difusión del Conocimiento, donde se debe brindar crédito de manera adecuada a los autores.

© **Reservados todos los derechos.** Queda estrictamente prohibida, sin la autorización expresa de los autores, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción parcial o total de este contenido, por cualquier medio o procedimiento parcial o total de este contenido, por cualquier medio o procedimiento.

Comité Científico Académico

Dr. Lucio Noriero-Escalante
Universidad Autónoma de Chapingo, México

Dra. Yorkanda Masó-Dominico
Instituto Tecnológico de la Construcción, México

Dr. Juan Pedro Machado-Castillo
Universidad de Granma, Bayamo. M.N. Cuba

Dra. Fanny Miriam Sanabria-Boudri
Universidad Nacional Enrique Guzmán y Valle, Perú

Dra. Jennifer Quintero-Medina
Universidad Privada Dr. Rafael Belloso Chacín, Venezuela

Dr. Félix Colina-Ysea
Universidad SISE. Lima, Perú

Dr. Reinaldo Velasco
Universidad Bolivariana de Venezuela, Venezuela

Dra. Lenys Piña-Ferrer
Universidad Rafael Belloso Chacín, Maracaibo, Venezuela

Dr. José Javier Nuvaez-Castillo
Universidad Cooperativa de Colombia, Santa Marta,
Colombia

Constancia de Arbitraje

La Casa Editora del Polo, hace constar que este libro proviene de una investigación realizada por los autores, siendo sometido a un arbitraje bajo el sistema de doble ciego (peer review), de contenido y forma por jurados especialistas. Además, se realizó una revisión del enfoque, paradigma y método investigativo; desde la matriz epistémica asumida por los autores, aplicándose las normas APA, Sexta Edición, proceso de anti-plagio en línea Plagiarisma, garantizándose así la científicidad de la obra.

Comité Editorial

Abg. Néstor D. Suárez-Montes
Casa Editora del Polo (CASEDELPO)

Dra. Juana Cecilia-Ojeda
Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela

Dra. Maritza Berenguer-Gouarnaluses
Universidad Santiago de Cuba, Santiago de Cuba, Cuba

Dr. Víctor Reinaldo Jama-Zambrano
Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí, Ext. Chone

ÍNDICE GENERAL

	Pág.
PRÓLOGO	1
CAPÍTULO I. PROPORCIONALIDAD	2
Cálculo de un término de una proporción	3
Magnitudes proporcionales	5
CAPÍTULO II. REGLA DE TRES	7
Regla de tres simple	7
Regla de tres compuesta	10
Regla de tres compuesta mixta	13
Tanto por ciento	15
Interés simple	18
CAPÍTULO III. RELACIONES	20
Producto cartesiano	21
Plano cartesiano	23
Relaciones	25
CAPÍTULO IV. EXPRESIONES ALGEBRAICAS	28
Monomios y polinomios	29
Operaciones algebraicas	29
Productos y cocientes notables	33
CAPÍTULO V. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL	38
Factorar o descomponer en factores	38
Igualdad de polinomios	47
Algoritmo de la división	48
Radicación	50

Operaciones con radicales	52
CAPÍTULO VI. ECUACIONES.....	55
Ecuaciones de primer grado con una y dos incógnitas	55
Propiedades de la igualdad	60
Ecuación lineal o de primer grado con una incógnita	63
Valor numérico de expresiones algebraicas	64
Solución de problemas mediante el uso de ecuaciones	67
Sistema de ecuaciones lineales (1er grado)	70
Sistemas de ecuaciones lineales con 3 incógnitas	79
Artificios para resolver sistemas de ecuaciones	83
Sistemas de ecuaciones lineales con n incógnitas	100
Ecuaciones de segundo grado	103
Ecuaciones de segundo grado con radicales	123
Sistemas de ecuaciones cuadráticas	134
CAPÍTULO VII. NÚMEROS COMPLEJOS	155
Operaciones con números complejos	156
Desigualdades	157
Inecuaciones	157
CAPÍTULO VIII. GEOMETRÍA PLANA	158
Líneas, punto, plano, recta, rayo, segmento, vector	158
Ángulos	161
Clasificación de ángulos según su posición	165
Triángulos	168
Semejanza de triángulos	172

CAPÍTULO IX. TRIGONOMETRÍA	176
Unidad del ángulo plano: el radián, transformaciones	176
Teorema de Pitágoras	178
Funciones trigonométricas naturales de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo	179
Signos algebraicos de las funciones trigonométricas	183
Valores de los ángulos de 30,45 y 60 grados	185
Relaciones trigonométricas	188
Identidades trigonométricas	189
Triángulos oblicuángulos	190
CAPÍTULO X. INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA	194
Medidas de tendencia central	194
Media aritmética	194
Mediana	196
Moda	197
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICA	200

PRÓLOGO

El estudio de las matemáticas tiene mayor importancia en la mecanización de las operaciones y la obtención correcta de soluciones.

El conocimiento de la matemática financiera tiene vital importancia por su aplicación mediata e inmediata en situaciones comerciales y financieras.

El mayor énfasis que se da es a las operaciones financieras más comunes con las que puede encontrarse en la práctica.

Las matemáticas son una herramienta fundamental en el campo de la administración y las finanzas. Proporcionan los medios para analizar datos, tomar decisiones informadas y resolver problemas de manera eficiente. En este curso introductorio, exploraremos los conceptos matemáticos clave que son esenciales para comprender y abordar una amplia gama de situaciones en el mundo empresarial y financiero.

La aritmética es la rama de las matemáticas que se ocupa de los números y las operaciones básicas como la suma, la resta, la multiplicación y la división.

El álgebra se centra en la manipulación de símbolos y expresiones matemáticas para resolver ecuaciones y representar relaciones entre variables. (Vargas, M. , 2019)

La razón y la proporción son conceptos fundamentales en la toma de decisiones financieras, especialmente en la gestión de presupuestos y en el análisis de relaciones entre cantidades.

Las funciones matemáticas describen relaciones entre variables y son herramientas poderosas para modelar fenómenos financieros como el crecimiento exponencial, el interés compuesto y las tasas de cambio.

La estadística descriptiva se utiliza para resumir y visualizar conjuntos de datos, lo que permite a los administradores y analistas comprender mejor el comportamiento de variables financieras y tomar decisiones basadas en datos.

La probabilidad es crucial en la gestión del riesgo y la toma de decisiones bajo incertidumbre. Permite evaluar la posibilidad de eventos futuros y calcular expectativas financieras.

El cálculo financiero básico incluye conceptos como el valor temporal del dinero, el cálculo de tasas de interés y la evaluación de proyectos de inversión, todos fundamentales para la planificación financiera y el análisis de inversiones.

En resumen, la Matemática I proporciona las herramientas necesarias para analizar datos, resolver problemas y tomar decisiones efectivas en el ámbito de la administración y las finanzas. Este curso proporcionará una base sólida en estos conceptos fundamentales, preparando a los estudiantes para enfrentar los desafíos numéricos del mundo empresarial y financiero con confianza y competencia. (Vargas, M. , 2019)

CAPÍTULO I

PROPORCIONALIDAD

RAZONES Y PROPORCIONES

RAZÓN ENTRE DOS NÚMEROS

RAZÓN:

Se llama **razón** entre dos números **a** y **b** (con $b \neq 0$), al cociente de la división de **a** por **b**.

Simbólicamente: **a** es **b** se expresa: **a: b** o $\frac{a}{b}$ (Martínez, A., 2010)

Una razón se puede escribirse:

- a) separando los números con la raya de fracción.

$$\frac{180}{6} \text{ se lee "180 es a 6"}$$

- b) separando los dos números con dos puntos

$$180: 6 \text{ se lee "180 es a 6"}$$

Diferencia entre razón y número fraccionario.

Una **razón** es una relación entre dos números que dan un **cociente abstracto**, es decir no especifica unidades de referencia. (Martínez, A., 2010)

Una **fracción** expresa un **número concreto** es decir su cociente especifica las partes de la unidad.

Por ejemplo:

$$\frac{\text{una..naranja}}{\text{dos...naranjas}} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \neq \text{que media naranja}$$

Ejemplo 1:

Supongamos que un automóvil recorre 180 km por cada 6 galones de gasolina. ¿Cuál es el rendimiento del automóvil por galón de gasolina?

Solución.

Llamamos rendimiento del automóvil a la razón de los km recorridos entre los galones consumidos.

Luego, rendimiento del automóvil = $\frac{180 \text{ km}}{6 \text{ galones}} = 30 \text{ km/galón}$.

O sea, el rendimiento del automóvil es 30 kilómetros por galón de gasolina.

Ejemplo 2:

Una bandera mide 15 m de largo y 5 metros de ancho, ¿Cuál es la razón del largo contra el ancho?

$$\text{razón} = \frac{\text{largo}}{\text{ancho}} = \frac{15m}{5m} = \frac{3}{1}$$

Esto significa que el largo de la bandera es tres veces más que el ancho.

CÁLCULO DE UN TÉRMINO DE UNA PROPORCIÓN

PROPORCIÓN:

Una proporción es la igualdad de dos razones.

Simbólicamente: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Se lee “a es: a b como c es a d”

Elementos de la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$$

En esta proporción, **a** y **c** reciben el nombre de **antecedentes**, mientras que **b** y **d** **consecuentes**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a d = b c$$

En esta proporción, a y d reciben el nombre de **extremos**, mientras que b y c se conocen como **medios** por su posición. (Gutiérrez, 2012)

Si x es un término desconocido en una proporción dada por:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{c}{x}, & \text{entonces} & \quad x = \frac{bc}{a} \\ \frac{a}{b} &= \frac{x}{d}, & \text{entonces} & \quad x = \frac{ad}{b} \\ \frac{x}{b} &= \frac{c}{d}, & \text{entonces} & \quad x = \frac{bc}{d} \\ \frac{a}{x} &= \frac{c}{d}, & \text{entonces} & \quad x = \frac{ad}{c} \\ \frac{a}{x} &= \frac{x}{d}, & \text{entonces} & \quad x = \pm \sqrt{ad} \end{aligned}$$

Ejemplo.

Calculemos el extremo desconocido en las siguientes proporciones:

$$\text{a) } \frac{x}{8} = \frac{12}{16}, \text{ entonces } 16x = 8 \times 12 ; x = \frac{8 \times 12}{16} = 6$$

$$\text{luego, si } \frac{x}{8} = \frac{12}{16}, \text{ entonces } x = 6$$

$$\text{b) } \frac{0,75}{4} = \frac{3}{x}, \text{ entonces } 0,75x = 4 \times 3 ; x = \frac{4 \times 3}{0,75} = 16$$

$$\text{luego, si } \frac{0,75}{4} = \frac{3}{x}, \text{ entonces } x = 16$$

TALLER

Calcular el medio desconocido en las siguientes proporciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{6}{x} & \text{b) } \frac{1}{\frac{4}{x}} = \frac{x}{25} & \text{c) } \frac{0,25}{\frac{9}{20}} = \frac{x}{\frac{3}{5}} \\ \text{d) } \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{11}{15} - \frac{2}{5}\right)}}{x} = \frac{x}{(0,5)^2 \cdot \frac{1}{3}} & & \text{e) } \frac{0,32}{x} = \frac{x}{0,5} \end{array}$$

TAREA

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{x}{8} = \frac{6}{12} & \text{b) } \frac{x}{3} = \frac{15}{220} & \text{c) } \frac{\frac{1}{\frac{3}{4}}}{\frac{7}{3}} = \frac{x}{7} \\ \text{d) } \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}}{x} = \frac{2 + \frac{3}{4} - \frac{15}{4}}{\frac{5}{12} + \frac{1}{6}} & \text{e) } \frac{\sqrt{5^2 - 3^2}}{\sqrt{13^2 - 5^2}} = \frac{x}{\sqrt{12^2 + 3^4}} & \\ \text{f) } \frac{\frac{3}{25}}{t} = \frac{t}{3} & \text{g) } \frac{12\sqrt{13^2 - 5^2}}{y} = \frac{y}{\sqrt{5^2 - 3^2}} & \\ \text{h) } \frac{\frac{4}{5} + \frac{1}{10}}{x} = \frac{x}{\frac{1}{10} + 0,3} & \text{i) } \frac{x-2}{x+5} = \frac{6}{20} & \text{j) } \frac{2}{9} = \frac{x-10}{20-5x} \end{array}$$

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Pueden ser directamente proporcionales o inversamente proporcionales.

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES:

Son directamente proporcionales si la razón entre dos cantidades de la primera es igual a la razón entre las cantidades correspondientes de la segunda.

Se dice que dos magnitudes son directamente proporcionales si y sólo si existe una correspondencia biunívoca (a cada cantidad de una de ellas le corresponde una sola de la otra y recíprocamente y si a una de ellas se la multiplica o se divide por un número correspondiente queda multiplicado o dividido por dicho número). (Martínez, A., 2010)

Ejemplo

$$\frac{x}{y} = \frac{\text{tiempo..trabajado}}{\text{salario..cobrado}} = \frac{1h}{1500} = \frac{2h}{3000} = \frac{3h}{4500}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\text{peso..en..kg}}{\text{precio}} = \frac{1kg}{70} = \frac{2kg}{140} = \frac{3kg}{210}$$

A+ ⇒ +	Más kg de mercancía	Mayor precio
A - ⇒ -	Menos kg de mercancía	Mayor precio

Tabla 1.1. Magnitudes Proporcionales

Por lo tanto, las magnitudes directamente proporcionales van de + a + y de – a –

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES:

Si dos magnitudes son inversamente proporcionales la razón de las cantidades de la primera es igual a la recíproca de la razón entre las cantidades correspondientes de la segunda. (Gutiérrez, 2012)

Ejemplo:

El tiempo empleado en un desplazamiento será menor si llevamos mayor velocidad y será mayor el tiempo si llevamos menor velocidad, es decir en esta proporcionalidad inversa hay disparidad del signo.

A+ ⇒ -	mayor velocidad	Menor tiempo
A - ⇒ +	menor velocidad	Mayor tiempo

Tabla 1.2. Magnitudes Proporcionales

Por lo tanto, las magnitudes inversamente proporcionales van de + a - y de – a +

Ejemplo:

Para recorrer 100 km. Utilizaremos:

Velocidad x	10 km/h	20 km/h	50 km/h
Tiempo y	10h	5h	2h

Tabla 1.3. Magnitudes Proporcionales

Si observamos el cuadro anterior veremos que si multiplicamos los pares de números x.y correspondientes obtenemos un producto constante igual a 100 o sea.

$$x.y = 100$$

CAPÍTULO II

REGLA DE TRES

La regla de tres es una operación que tiene por objeto hallar el cuarto término de una proporción cuando se conocen tres. (Martínez, A., 2010)

La regla de tres puede ser simple o compuesta, directa o inversa.

La regla de tres simple se tiene cuando solamente intervienen en ella 2 magnitudes.

La regla de tres compuesta cuando intervienen 3 o más magnitudes.

REGLA DE TRES SIMPLE

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA:

La regla de tres simple directa es un método para solucionar problemas en los que intervienen dos magnitudes directamente proporcionales. (Martínez, A., 2010)

Supuesto y pregunta:

En una regla de tres, el **supuesto** está constituido por los datos del problema que ya se conocen y la **pregunta** por los datos del problema que contiene la incógnita. (Martínez, A., 2010)

Cantidades principales.

Son 2 o más términos homogéneos y conocidos uno supuesto y otro de la pregunta.

Cantidades relativas.

Son dos términos homogéneos uno conocido el supuesto y otro desconocido la pregunta.

Ejemplo:

Si 4 gorras cuestan 8 USD, ¿cuánto costará 12 gorras?

	Cantidades principales	Cantidades relativas
Supuesto →	4 gorras -----	\$8
Pregunta →	12 gorras -----	X

Primer método. (Por las proporciones)

$$\frac{4}{8} = \frac{12}{x}$$

$$X = \frac{8 \times 12}{4} = \$24$$

Segundo método. (Directo)

Supuesto →	4 gorras -----	\$8
Pregunta →	12 gorras -----	X

$X = \frac{12 \times 8}{4} = \24

REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

Se llama Regla de Tres Inversa, cuando tienen dos magnitudes inversamente proporcionales.

Ejemplo:

12 obreros tardan 30 días para hacer una obra. ¿Cuántos obreros se necesitan para hacerla en 24 días?

30 días-----	12 obreros
24 días -----	X

Primer método. (Por las proporciones)

$$\frac{30}{24} = \frac{x}{12}$$

$$X = \frac{30 \times 12}{24} = 15 \text{ obreros}$$

Siendo magnitudes inversamente proporcionales igualamos a la 1ª razón con el inverso de la 2ª razón

Segundo método. (Directo)

Se multiplica la cantidad principal del supuesto por la cantidad relativa del supuesto y se divide para la cantidad principal de la pregunta.

	Principales	Relativas
Supuesto	30 días	12 obreros
Pregunta	24 días	X

$$X = \frac{30 \times 12}{24} = 15 \text{ obreros}$$

REGLA PRÁCTICA PARA RESOLVER PROBLEMAS:

A las magnitudes que sean **directamente** proporcionales con la incógnita se les pone **debajo un signo + encima un signo –**

Y a las magnitudes que son **inversamente** proporcionales con la incógnita se les pone **debajo un signo – y encima un signo +**

Las Magnitudes Directamente proporcionales forman la regla de tres directa.

Ejemplos:

- a) Volumen y peso
- b) Número de objetos y precio.
- c) Velocidad y espacio (si el tiempo no varía)
- d) Tiempo y espacio (si la velocidad no varía)
- e) Obra realizada y tiempo (con igual número de obreros).
- f) Volumen y capacidad.
- g) Volumen y altura de una pirámide (si el área de la base no varía)
- h) El tiempo y el interés que produce un capital
- i) El tiempo y el salario que recibe un obrero.

- j) la cantidad de tela y su costo.
- k) Longitud del radio y área del círculo.

Las Magnitudes Inversamente proporcionales forman la regla de Tres Inversa.

Ejemplos:

- a) Velocidad y tiempo (si el espacio no varía)
- b) Número de obreros y tiempo (igual obra)
- c) Diámetro de una rueda de bicicleta y número de vueltas (la distancia no varía)
- d) Los días de trabajo y las horas diarias que se trabaja.
- e) La longitud y el ancho (con superficie constante)
- f) La longitud, ancho y altura (con volumen constante)

REGLA DE TRES COMPUESTA

La regla de tres compuesta tiene más de dos magnitudes en el planteo y resolución y que comparados de dos en dos son directamente proporcionales. (Martínez, A., 2010)

REGLA DE TRES COMPUESTA DIRECTA

Cuando todas las magnitudes son directamente proporcionales.

Esquema general:

El planteamiento de un problema de regla de tres compuesta directa, es de la forma:

D		D		
a	↔	b	↔	c
d	↔	e	↔	x

Al reducir el problema a regla de tres simple, se obtiene:

$$\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{e} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{d \cdot e \cdot c}{a \cdot b}$$

El producto entre la razón de las cantidades de la primera magnitud y la razón entre las cantidades correspondientes de la segunda magnitud es igual a la razón entre las dos cantidades de la tercera magnitud. (Jiménez, 2020)

Ejemplo.

10 canecas de 15 galones cada una cuestan 225.000 cuánto costarán 8 canecas de 55 galones de combustible si el precio por galón es igual.

Planteo. -

Canecas	Galones	Sucres
10	15	225.000
8	55	x
-	+	+

Solución.

1ero. Analizamos las canecas y el precio.

10 canecas cuestan 225.000 menos (8) canecas costarán menos por lo tanto la magnitud es directa.

2do. Analizamos los galones y el precio. 15 galones cuestan 225.000 (55) más galones costarán más dinero.

La regla de tres es directa.

Por lo tanto, la regla de tres es compuesta y directamente proporcional.

Canecas	Galones	Sucres
10	15	225.000
8	55	x

$$X = \frac{8 \times 55 \times 225.000}{10 \times 15} = 660.000$$

Regla general:

$$\begin{array}{ccccc}
 D & & D & & \\
 a & \leftrightarrow & b & \leftrightarrow & c \\
 d & \leftrightarrow & e & \leftrightarrow & x \\
 \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{e} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{d \cdot e \cdot c}{a \cdot b}
 \end{array}$$

Reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{10}{8} \cdot \frac{15}{55} &= \frac{225.000}{x} \\
 X &= \frac{8 \times 55 \times 225.000}{10 \times 15} = 660.000
 \end{aligned}$$

REGLA DE TRES COMPUESTA INVERSA

Cuando todas las magnitudes son inversamente proporcionales.

Esquema general:

El planteamiento de un problema de regla de Tres Compuesta Inversa es de la forma:

$$\begin{array}{ccccc}
 I & & I & & \\
 a & \leftrightarrow & b & \leftrightarrow & c \\
 d & \leftrightarrow & e & \leftrightarrow & x
 \end{array}$$

Al reducir el problema a regla de tres simple, se obtiene:

$$\frac{d}{a} \cdot \frac{e}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$$

La inversa de la razón de las dos cantidades de la primera magnitud por la inversa de la razón de las cantidades de la segunda magnitud es igual a la razón de las dos cantidades de la tercera magnitud. (Martínez, A., 2010)

Ejemplo:

Un grupo de 45 excursionistas tienen víveres para 40 días a una ración de 900 gramos por día. Cuál debe ser la ración diaria. ¿Si al iniciar la excursión se incrementa el grupo en 5 personas y el tiempo se prolonga a 2 meses?

Planteo. –

Personas	Días	Gramos
45	40	900
50	60	x

Análisis.

- 1) Analizamos las magnitudes personas y gramos, cada uno 45 personas tienen 900 gramos c/r si son más personas tendrán menos ración por lo tanto la magnitud es inversamente proporcional.
- 2) Analizamos las magnitudes días y gramos. Para 40 días tienen 900 gramos de ración si son más días alcanzarán a menos gramos de ración.

La magnitud es inversamente proporcional. Por lo tanto, es una regla de Tres Compuesta Inversa.

Solución

Personas	Días	Gramos
45	→ 40	→ 900
50	60	x

$$X = \frac{45 \times 40 \times 900}{50 \times 60} = 540 \text{ gramos}$$

Respuesta= Cada persona recibe 540 gramos de ración.

Regla general:

$$\begin{array}{ccccc}
 & I & & I & \\
 a & \leftrightarrow & b & \leftrightarrow & c \\
 d & \leftrightarrow & e & \leftrightarrow & x \\
 \frac{d}{a} \cdot \frac{e}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}
 \end{array}$$

Reemplazando tenemos:

$$\begin{array}{l}
 \frac{50}{45} \cdot \frac{60}{40} = \frac{900}{x} \\
 X = \frac{45 \times 40 \times 900}{50 \times 60} = 540 \text{ gramos}
 \end{array}$$

REGLA DE TRES COMPUESTA MIXTA

Cuando existen magnitudes directa e inversamente proporcionales.

Esquema general:

El planteamiento de un problema de regla de tres compuesta mixta, es de la forma:

D		I		
a	↔	b	↔	c
d	↔	e	↔	x

Al reducir el problema a regla de tres simple, se obtiene:

$$x = \frac{d.b.c}{ae}$$

Ejemplo:

15 obreros trabajando 10 horas diarias para hacer 180 metros tardan 12 días. ¿Cuántos días tardarán 32 obreros para hacer 600 metros del mismo trabajo, si trabajan 8 horas diarias?

Planteo.

Metros	obreros	horas	días
180	15	10	12
600	32	8	x

Análisis.

Se comparan de dos en dos las magnitudes con la incógnita.

Si tienen que realizar + metros se demorarán + tiempo.

Regla de tres directa.

m	días
180	12
600	x
+	+

Más obreros menos días por lo tanto regla de Tres Inversa.

Obreros	días
15	→ 12
32	x
-	+

Por lo tanto, la regla de tres compuesta es mixta.

Solución.

Metros	Obreros	horas	días		
		$\frac{180}{600}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{12}{x}$
$X = \frac{600 \times 15 \times 10 \times 12}{180 \times 32 \times 8} = \frac{375}{16} = 23\frac{7}{16}$					

Respuesta= Se demorarán $23\frac{7}{16}$ días

Regla general:

	D		I	
a	↔	b	↔	c
d	↔	e	↔	x

Al reducir el problema a regla de tres simple, se obtiene:

$$x = \frac{d.b.c}{ae}$$

$$\frac{180}{600} \cdot \frac{15}{32} \cdot \frac{10}{8} = \frac{12}{x}$$

$$X = \frac{600 \times 15 \times 10 \times 12}{180 \times 32 \times 8} = \frac{375}{16} = 23\frac{7}{16}$$

TANTO POR CIENTO

Se llama tanto por ciento de un número a una o varias de las 100 partes iguales en que se puede dividir dicho número, es decir uno u varios centésimos de un número.

Se representa el tanto por ciento por el signo %. (Martínez, A., 2010)

Así:

$$4 \% = \frac{4}{100} = 0.04$$

$$15 \% = \frac{15}{100} = 0.15$$

Ejemplo:

El 4 % de 80, ó $\frac{4}{100}$ de 80 equivale a 4 centésimas partes de 80, es decir que 80 se divide en 100 partes iguales y de ellos se toman 4 partes.

El 15 % de 200 significa que el 200 se divide en cien partes iguales y de ellas se toman 15.

CÁLCULO DE PORCENTAJES:

1.HALLAR UN PORCENTAJE DE UN NÚMERO.

$$\begin{array}{rcl} & \text{Hallar el 8 \% de 45} & \\ 45 & \text{-----} & 100 \% \\ X & \text{-----} & 8\% \end{array}$$

$$X = 3.6$$

2. HALLAR UN NÚMERO CUANDO SE CONOCE UN % DE ÉL:

De qué número es 46 el 23 %?

$$\begin{array}{rcl} 46 & \text{-----} & 23 \% \\ X & \text{-----} & 100\% \end{array}$$

$$X = 200$$

3. ¿DADO DOS NÚMEROS, CALCULAR QUE TANTO POR CIENTO ES UNO DEL OTRO?

¿Qué porcentaje de 8400 es 2940

$$8400 \text{-----} 100\%$$

$$2940 \text{-----} X$$

$$X = 35\%$$

2940 es el 35 % de 8400.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN:

María gana 800 USD, si gastó el 20 % en alimentación y el 15 % en arriendo, cuánto dinero le sobra?

$$800 \text{ USD} \text{-----} 100\%$$

$$X \text{-----} 20\%$$

$$X = 160 \text{ USD (alimentación)}$$

$$800 - 160 = 640 \text{ USD}$$

$$640 \text{ USD} \text{-----} 100\%$$

$$X \text{-----} 15 \%$$

$$X = 96 \text{ USD (arriendo)}$$

$$640 - 96 = 544 \text{ USD que le sobra.}$$

INTERÉS:

El interés es la ganancia que produce una suma de dinero o capital prestado a un tanto por ciento dados y durante un tiempo determinado.

INTERÉS. - Provecho, utilidad, ganancia producida.

CAPITAL. - Cantidad de dinero que se presta y produce interés.

CAPITAL INICIAL. - Es el capital dado a préstamo

CAPITAL FINAL. - Es la suma del capital inicial más el interés producido.

TANTO POR CIENTO. - Es la ganancia que produce 100 unidades del capital prestado.

INTERES SIMPLE. - Cuando el capital permanece invariable.

INTERÉS COMPUESTO. - Cuando los intereses se capitalizan periódicamente, es decir el interés se acumula al final de periodos iguales, el capital existente en el periodo correspondiente para producir nuevos intereses.

INTERÉS SIMPLE

Es simple cuando el interés, es decir la ganancia que produce el capital prestado, se percibe al final de periodos iguales de tiempo, sin que el capital inicial varíe.

Cuanto t es en años:

$$i = C.r.t \quad \text{ó} \quad i = C.\frac{T}{100}r.t$$

Cuando t es en meses:

$$i = \frac{C.r.t}{12} \quad \text{ó} \quad i = \frac{C.T.t}{1200}$$

Cuando t es en días:

$$i = \frac{C.r.t}{360} \quad \text{ó} \quad i = \frac{C.T.t}{36000}$$

Monto o Capital final:

$$M = C + i$$

Ejemplo:

Calcular el interés que produce al prestar 2300 USD al 5 % durante 3 años.

Datos:

$$C = 2300 \text{ USD}$$

$$i = C.r.t$$

$$T = 5\%$$

$$i = 2300 \times 0.05 \times 3$$

$$t = 3 \text{ años}$$

$$i = 345 \text{ USD}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Si 5 camisetas cuestan 30 USD, ¿Cuánto costarán 3 docenas de las mismas camisetas?
Si 2 @ de una mercancía cuesta 14.35 USD. ¿Cuánto importará 5 quintales del mismo producto?
Los $\frac{2}{5}$ de la capacidad de un tanque son 500 litros. Cuál será la capacidad de los $\frac{3}{8}$ del mismo tanque?
- Una cuadrilla de obreros emplea 14 días trabajando 8 horas diarias en realizar cierta obra. ¿Si hubiéramos trabajado una hora menos el día, en cuántos días habrían terminado la obra?
- Una guarnición de 1300 hombres, tienen víveres para 4 meses. Si se quiere que los víveres duren 10 días más, ¿cuántos hombres habrá que rebajar de la guarnición?
- Dos números están en relación 5 a 3. Si el mayor es 655, ¿cuál es el número menor?
- 8 hombres han cavado en 20 días una zanja de 50 metros de largo, 4 m. de ancho y 2 m. de profundidad. ¿En cuánto tiempo hubieran cavado la zanja 6 hombres menos?

Hallar:

El 15 % de 720

El 74 % de 3540

El $\frac{1}{2}$ % de 25

De qué número es:

35 el 5 %

155 el 46 %

850 el 72 %

Qué porcentaje de:

860 es 129

1950 es 156

58 es 3

Luis tiene que pagar 900 USD. Si se le rebaja el 5 % de la deuda, ¿cuánto debe cancelar?

De una finca de 50 caballerías se vende el 16 % y se alquila el 14 %. ¿Cuántas caballerías le quedan?

CAPÍTULO III

RELACIONES

PARES ORDENADOS

El par ordenado, está formado por dos elementos (a, b) , que guardan un orden estricto y se llaman componentes; de manera que los pares ordenados (a, b) y (b, a) no son iguales. Las componentes de los pares ordenados son elementos de conjuntos, por lo tanto, pueden ser: personas, cosas, números, etc. (Martínez, A., 2010)

PLANO CARTESIANO

El plano cartesiano está constituido por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical que se intersecan en el punto cero (0), dividiendo al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes; las rectas se conocen con el nombre de ejes coordenados; el eje horizontal es el eje de abscisas en el que se ubican las primeras componentes de los pares ordenados representadas con la letra “x” y el vertical es el eje de ordenadas, en el que ubican las segundas componentes representadas con la letra “y”. (Martínez, A., 2010)

En el eje horizontal derecho y en el vertical superior, se colocan los números positivos; en el eje horizontal izquierdo y en el vertical inferior se colocan los números negativos, conservando siempre una unidad previamente establecida que es la distancia entre uno y otro punto de los ejes coordenados. (Ortega, 2016)

Por comodidad se en los ejes, se colocan números enteros, esto no quiere decir que son los únicos números, en realidad estarán sobreentendidos todos los números reales.

Los pares ordenados: (x, y) , son puntos del plano cartesiano. Según el Gráfico 3.1

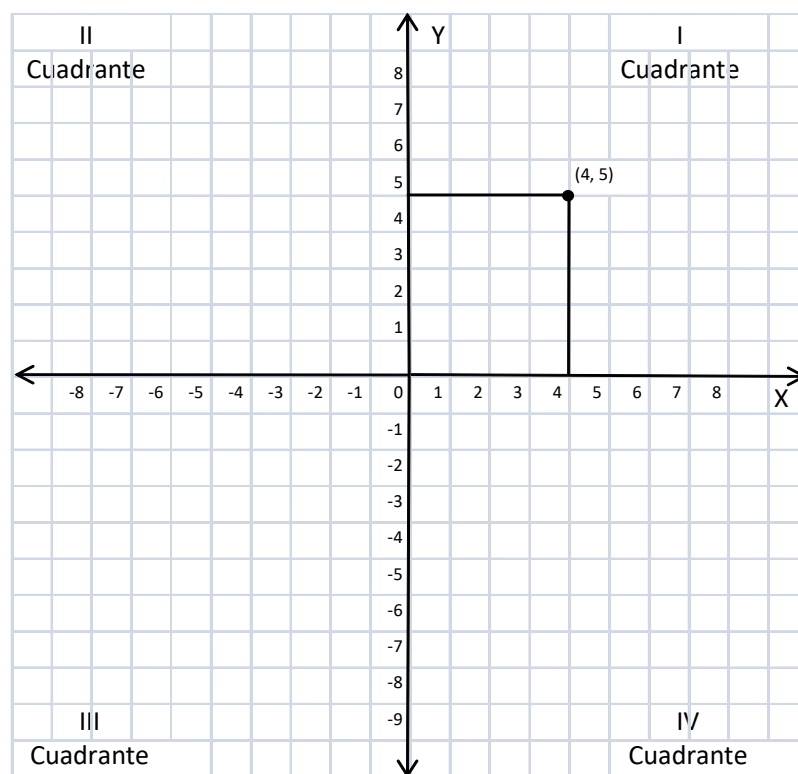


Gráfico 3.1. Cuadrantes en el Sistema de Ejes Coordinados

PRODUCTO CARTESIANO

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, es el conjunto de los pares ordenados, cuyas primeras componentes pertenecen al conjunto A y las segundas componentes pertenecen al conjunto B. Lo notaremos por $A \times B$. (Ortega, 2016)

Simbólicamente:

$$A \times B = \left\{ \begin{matrix} a, b \\ \square \end{matrix} \in A \wedge \begin{matrix} \square b \\ \square \end{matrix} \in B \right\}$$

Imagen 3.1. Producto Cartesiano

A es el conjunto de SALIDA y B es el conjunto de LLEGADA. (Martínez, A., 2010)

Ejemplo: Sean los conjuntos: $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{5, 6\}$

El producto cartesiano ($A \times B$), expresado en forma de conjunto de pares ordenados, es:

$$A \times B = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6)\}$$

$$B \times A = \{(5,1), (6,1), (5,2), (6,2), (5,3), (6,3)\}$$

Observe que: $A \times B \neq B \times A$

El número de pares del conjunto producto, se calcula multiplicando el número de elementos del conjunto de salida por el número de elementos del conjunto de llegada.

(Jiménez, 2020)

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

$$n(A \times B) = 3(2)$$

$$n(A \times B) = 6$$

Gráficamente:

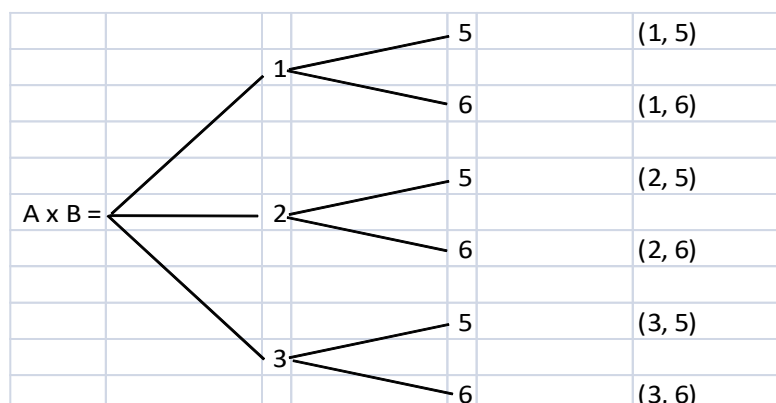


Gráfico 3.2. Diagrama de Árbol

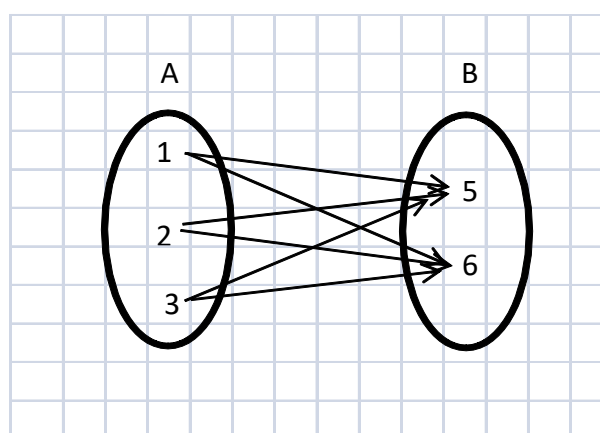


Gráfico 3.3. Diagrama de Venn y Sagital

PLANO CARTESIANO

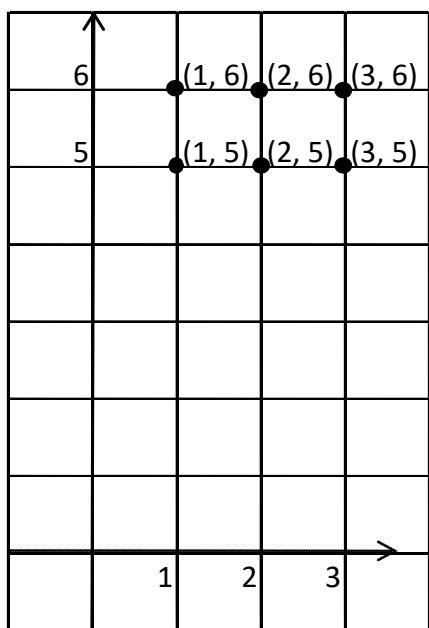


Gráfico 3.4. Tabla de Entrada

A \ B	5	6
1	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 5)	(3, 6)

Tabla 3.1 Tabla de Doble Entrada

ACTIVIDADES

1. Sin graficar, identifique el cuadrante en el que están ubicados los puntos siguientes:

A (-1,2); B(2,-1); C (-3,-5); D (2,0); E (5,-8); F (-3,0); G (0,-8); H (6,-8)

2. Represente gráficamente en el plano cartesiano, los puntos:

A (4, 5); B (-3, 8); C (-6, -6); D (8, -2); E (6, 0); F (-5, 0); G (0, 2); H (0, -7); O (0, 0); P (-9/2, -5.5); Q ($\sqrt{12}$, -7)

3. De acuerdo con el gráfico propuesto, escribe los pares ordenados que corresponden a los puntos dados:

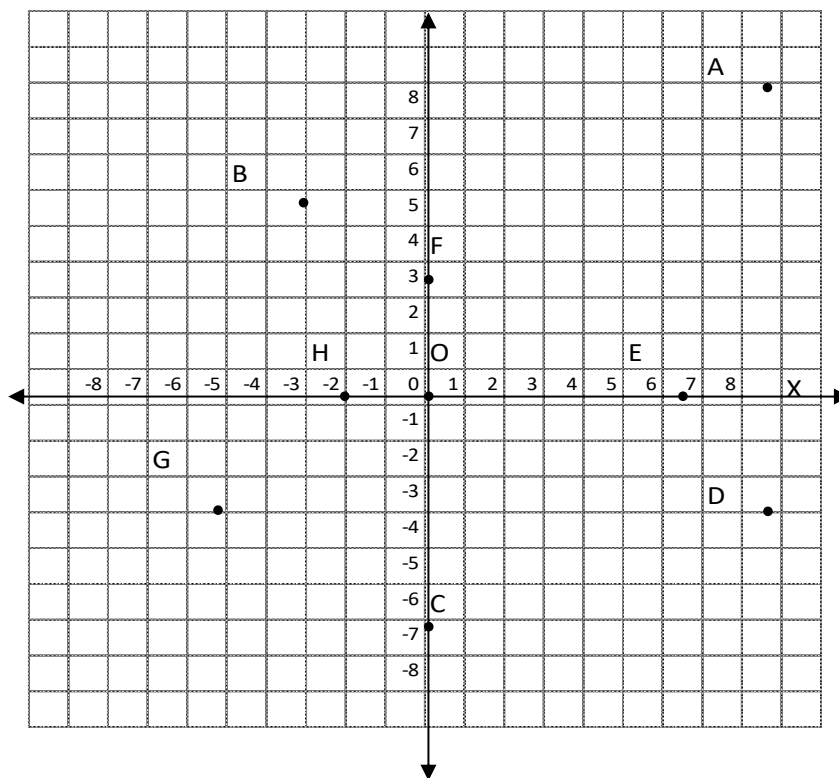


Gráfico 3.5 Plano Cartesiano con Puntos y Coordenadas

4. Represente gráficamente en un plano cartesiano y una con rectas, los puntos:
 - a. $(-8, 0)$; $(-6, 5)$ y $(-2, 2)$
 - b. $(1, 3)$; $(3, 7)$; $(8, 3)$ y $(6, 7)$
 - c. $(-7, -4)$; $(-7, -8)$; $(-3, -4)$ y $(-3, -8)$
 - d. $(5, -2)$; $(2, -5)$; $(5, -8)$ y $(8, -5)$
5. Partiendo del Punto $(4, 6)$, realiza los siguientes desplazamientos: 3 unidades a la izquierda, 5 hacia abajo, 2 a la derecha, 4 hacia abajo, 6 a la izquierda y 1 hacia arriba. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de llegada?
6. Dados los conjuntos: $A = \{3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 6\}$; $C = \{2, 8\}$; $D = \{0, 1, 2, 3\}$. Indica cuántos pares ordenados tiene cada producto cartesiano y determina:
 - a. $A \times B$, en forma de conjunto.
 - b. $A \times C$, en diagrama de árbol.
 - c. $B \times D$, en tabla de doble entrada.

- d. $C \times D$, en diagrama sagital.
- e. $C \times A$, en el plano cartesiano.

RELACIONES

Una relación es un subconjunto del producto cartesiano, denominado conjunto relación, en el cual los pares ordenados, cumplen una condición o regla definida entre la primera y segunda componente. (Martínez, A., 2010)

$R = A R B$, se lee: A relación B.

Para determinar un conjunto relación, debemos considerar lo siguiente:

Un primer conjunto (CONJUNTO DE SALIDA).

Un segundo conjunto (CONJUNTO DE LLEGADA).

Los pares ordenados del producto cartesiano entre los dos conjuntos.

Una regla o condición definida. (Martínez, A., 2010)

Ejemplo:

Halleemos el conjunto relación $M R N$, que valide la regla “menor que”; definido entre los conjuntos:

$$M = \{2, 4, 8\}$$

$$N = \{-3, 1, 5, 7\}$$

$$M \times N = \{(2, -3); (2, 1); (2, 5); (2, 7); (4, -3); (4, 1); (4, 5); (4, 7); (8, -3); (8, 1); (8, 5); (8, 7)\}$$

Determinamos el producto cartesiano

Los pares ordenados que cumplen la condición planteada forman el conjunto relación $M R N$.

$$MRN = \{(2, 5); (2, 7); (4, 5); (4, 7)\}$$

Para mejor comprensión al conjunto relación, se lo representa en Diagrama de Venn y sagital: (Martínez, A., 2010)

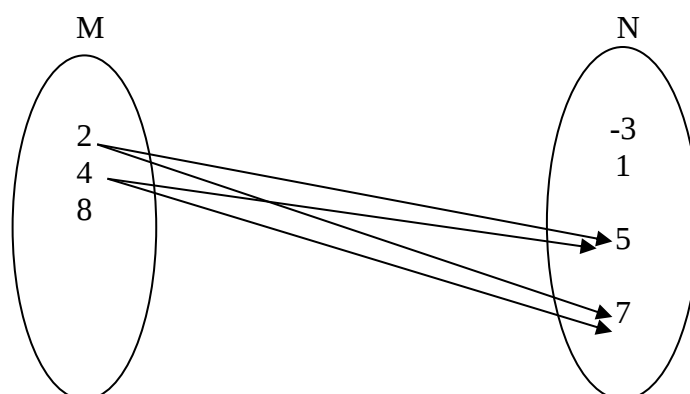


Gráfico 3.6 Diagrama de Venn

Conjunto de salida: $A = \{2, 4, 8\}$

Conjunto de llegada: $B = \{-3, 1, 5, 7\}$

DOMINIO

(Dom): Es el conjunto formado con los elementos del conjunto de salida que cumplen la condición planteada.

$$Dom = \{2, 4\}$$

CODOMINIO

(Cod) o RANGO: Es el conjunto formado con los elementos del conjunto de llegada que cumplen la condición dada. (Jiménez, 2020)

$$Cod = \{5, 7\}$$

Algunas reglas que expresan una relación son:

Mayor que
Menor que
Igual que
Divisor de
Múltiplo de
 $y = x + 2$
 $y = 2x - 1$
Doble de

ACTIVIDADES

1. Dados los conjuntos: $P = \{2,3,4\}$ y $Q = \{2,6,8\}$. Hallar el producto cartesiano $P \times Q$ en forma de conjunto.
2. Dados los conjuntos: $A = \{a,b\}$ y $B = \{x,y,z\}$. Hallar el producto cartesiano $A \times B$ en diagrama de árbol.
3. Con los conjuntos: $R = \{\text{rojo, verde, blanco}\}$ y $S = \{\text{negro, azul}\}$. Hallar el producto cartesiano en tabla de doble entrada.
4. Con los conjuntos: $X = \{2,4,6\}$ y $Y = \{1,3,5\}$. Hallar el producto cartesiano en el plano cartesiano.
5. Con los conjuntos: $C = \{e,i\}$ y $D = \{a,e,u\}$. Hallar el producto cartesiano en Diagramas de Venn – sagital.
6. Con los conjuntos:
 $C = \{\text{Quito, Bogotá, Lima, Caracas}\}$ y $P = \{\text{Colombia, Perú, Bolivia, Chile}\}$ y la condición: “es capital de”, expresar:
 - a. El Conjunto de salida.
 - b. El conjunto de llegada.
 - c. El diagrama de Venn – sagital.
 - d. El conjunto $C \times P$
 - e. El Dominio.
 - f. El Condominio.
7. Plantea dos conjuntos y una regla o condición y encuentra:
 - a. El Conjunto de salida.
 - b. El conjunto de llegada.
 - c. El diagrama de Venn – sagital.
 - d. El conjunto $C \times P$
 - e. El Dominio.
 - f. El Condominio. (Martínez, A., 2010)

CAPÍTULO IV

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Concepto. - Cualquier agrupación de números y letras, a través de una o varias operaciones matemáticas, se denomina Expresión **Algebraica**. (Martínez, A., 2010)

Término. - Se denomina término (monomio), a un número específico, a una letra o al producto o cociente de las letras y números.

Ejemplos.

$3x^2 - x + 9$	Esta expresión consta de TRES términos
$2x^5 - 8ax^2y^2z$	Esta expresión consta de DOS términos

Elementos de un término. - En un término se distinguen dos elementos: El coeficiente numérico (incluye el signo) y la parte literal.

Ejemplos:

$4x^5$	4 es el coeficiente	x^5 es la parte literal
$-5/4y^3z^5$	-5/4 es la parte entera	y^3z^5 es la parte literal

Clases de Términos. –

Término Entero. - Cuando la expresión es entera.

Ejemplos:

$-45x^2y^5n$; $2z$; $7a^3b$

Término Fraccionario. - Cuando la expresión tiene denominadores.

Ejemplos:

$5x/7$; $3m^3/8$; $9y/17$

Término Racional. - Cuando la expresión no tiene literales dentro de radicales.

Ejemplos:

$\sqrt{7}a^2$	$\frac{\sqrt{7}x}{13}$	$\frac{\sqrt{15}a}{21}$
---------------	------------------------	-------------------------

Término Irracional. - Cuando la expresión tiene literales dentro de los radicales.

Ejemplos:

$$m^3$$

$$b^5 / 3$$

$$c^3 / 12$$

MONOMIOS Y POLINOMIOS

Monomio. - Expresiones que contienen un solo término.

Ejemplos:

$$7a^3$$

$$567m^5n^3y^7$$

$$65a^6b^3c^2d^5e^4$$

Polinomio. - Expresiones que contienen más de un término.

Ejemplos:

$$a + b$$

$$9x^2 + 3x + 10$$

$$a^4 + 5a^3 + 3a^2 + 7a + 20$$

OPERACIONES ALGEBRAICAS

Adición. -

Adicionar polinomios es encontrar un nuevo polinomio formado por los términos de los polinomios planteados.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{Adicionar } x^2 - 3x - 4 \text{ y } 2x^2 + 3 \\ (x^2 - 3x - 4) + (2x^2 + 3) &= x^2 - 3x - 4 + 2x^2 + 3 \\ &= 3x^2 - 3x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -8x^4 + 4x^2 - x + 2 \quad ; \quad x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2 \quad ; \quad -2x^3 + 3x + 3 \quad \text{y} \quad -x^4 - x - x^2 + 1 \\ (-8x^4 + 4x^2 - x + 2) + (x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2) + (-2x^3 + 3x + 3) + (-x^4 - x - x^2 + 1) \\ = -8x^4 + 4x^2 - x + 2 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2 - 2x^3 + 3x + 3 - x^4 - x - x^2 - x + 1 \\ = -8x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 4 \end{aligned}$$

Sustracción. -

Restar dos polinomios, es encontrar un tercer polinomio llamado diferencia, el mismo que adicionado con el segundo polinomio llamado sustraendo, nos da el primer polinomio llamado minuendo.

Ejemplos

$$\begin{aligned} \text{De } 5x^3 - 4x^2 \quad \text{Restar } -3x^3 + 2x \\ = (5x^3 - 4x^2) - (-3x^3 + 2x) \\ = 5x^3 - 4x^2 + 3x^3 - 2x \\ = 8x^3 - 4x^2 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Restar } -8x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 1 \quad \text{de } 4x^4 - 3x^2 - 3 \\ = (4x^4 - 3x^2 - 3) - (-8x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 1) \\ = (4x^4 - 3x^2 - 3) + (8x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 1) \\ = 4x^4 - 3x^2 - 3 + 8x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 1 \\ = 12x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 2 \end{aligned}$$

Multiplicación. -

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada uno de los términos del primer polinomio, por cada uno de los términos del segundo y luego se adicionan algebraicamente los productos.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} (2x^2 - 3xy + y^2)(x^2 + xy - 2y^2) \\ = 2x^4 + 2x^3y - 4x^2y^2 - 3x^3y - 3x^2y^2 + 6xy^3 + x^2y^2 + xy^3 - 2y^4 \\ = 2x^4 - x^3y - 6x^2y^2 + 7xy^3 - 2y^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2x^2 - x + 1)(x - 2)(x + 3) \\ = (2x^3 - 4x^2 - x^2 + 2x + x - 2)(x + 3) \\ = 2x^4 + 6x^3 - 5x^3 - 15x^2 + 3x^2 + 9x - 2x - 6 \\ = 2x^4 + x^3 - 12x^2 + 7x - 6 \end{aligned}$$

División. -

Dividir un polinomio (Dividendo) entre otro polinomio (Divisor), es buscar un tercer polinomio (Cociente), de tal manera que el producto del divisor por el cociente sea igual al dividendo. (Hernández, J. , 2016)

Ejemplos:

Dividir:

$$2x^2 + 12 + 10x \quad \text{entre } x + 3$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 10x + 12 \quad | \quad x + 3 \\ -2x^2 - 6x \quad \quad \quad 2x + 4 \\ \hline 0 \quad + 4x + 12 \\ -4x \quad -12 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

La división es exacta y el cociente es $2x + 4$

Dividir: $2x^4 + 5x^3 - 2x + 2$ entre $2x^2 - 3x + 2$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 2x + 2 & 2x^2 - 3x + 2 \\ -2x^4 + 3x^3 - 2x^2 & \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 + 8x^3 - 2x^2 - 2x \\ -8x^3 + 12x^2 - 8x \\ \hline 0 + 10x^2 - 10x + 2 \\ -10x^2 + 15x - 10 \\ \hline 0 + 5x - 8 \end{array}$$

El cociente es $x^2 + 4x + 5$ y el residuo es $5x - 8$ lo cual se interpreta así:

$$\frac{2x^4 + 5x^3 - 2x + 2}{2x^2 - 3x + 2} = x^2 + 4x + 5 + \frac{5x - 8}{2x^2 - 3x + 2}$$

TALLER

Adicionar los siguientes Polinomios.

$$4x - 8x^2 + 10 - x^3 \quad ; \quad -6x^2 + x - x^4 + 7 \quad y \quad -6x^2 + x^3 - x^4 - 11$$

$$\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{5}x - 7 \quad y \quad -\frac{3}{7}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}$$

$$\text{De } 3x^2 + 2x - x^3 + 6 \quad \text{Restar} \quad -x^2 + 4x^3 - 8 + 2x$$

Restar $\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ De $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x + \frac{4}{5}$

Multiplicar.

$$(x^3 - 3x^2 + 5) (2x^2 - 4x - 3)$$

$$\left(\frac{1}{3}x^2 - 2x^2 - \frac{3}{2}x^3\right) (2x^3 - 4x^2 + 2x - 6)$$

Dividir:

$$2x^3 - 7x^2 + 8x - 4 \quad \text{entre} \quad x - 2$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - 1\right) \quad \text{entre} \quad \left(\frac{1}{4}x - 1\right)$$

TAREA

Adicionar los siguientes polinomios

$$y^4 - 2y^2 + 3 \quad , \quad y^2 - 3y + 2 \quad y \quad -3y^4 + 3y^2 - 5y$$

$$x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5} \quad , \quad -\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5} \quad y \quad -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}$$

Restar los siguientes polinomios

$$\text{Restar } 4x^3 + 2x^2 \quad \text{De} \quad x^3 - 2x^2 + 5$$

De $\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 2$ Restar $\frac{5}{6}x^3 - \frac{2}{7}x^2 - x + \frac{6}{7}$

Multiplicar:

$$(x^2 - 1)(x+2)(x-3)(x+1)$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x^2 - \frac{3}{2}x^3\right)(2x^3 - 4x^2 + 2x - 6)$$

Dividir

$$(2x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x - 3) \text{ entre } (x^2 - 2x + 1)$$

$$2x^4 - 2x^3 + 4x - 8$$

$$2 - x + x^2$$

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

Producto de dos binomios con un Término Común. –

Es igual al cuadrado del término común, más la suma algebraica de los términos no comunes por el término común y más el producto de los términos no comunes. (Martínez, A., 2010)

Ejemplos:

$$\begin{aligned}(x+7)(x-4) &= x^2 + (7-4)x + (7)(-4) \\ &= x^2 + 3x - 28\end{aligned}$$

$$(x-6)(x-8) = x^2 - 14x + 48$$

Cuadrado de un Binomio. -

Es igual al cuadrado del primer término, más o menos el doble producto del primer término por el segundo y más el cuadrado del segundo término. (Martínez, A., 2010)

Ejemplos:

$$\begin{aligned}(x-7)^2 &= (x)^2 - 2(x)(7) + (7)^2 \\ &= x^2 - 14x + 49 \\ (2x-y^2)^2 &= (2x)^2 - 2(2x)(y^2) + (y^2)^2 \\ &= 4x^2 - 4xy^2 + y^4\end{aligned}$$

Cuadrado de un Trinomio. -

Es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los términos y la suma de los tres dobles productos con su respectivo signo. (Martínez, A., 2010)

Ejemplos:

$$\begin{aligned}(x-y+3)^2 &= x^2 + y^2 + 9 - 2xy + 6x - 6y \\ (x^2-3y+2z^3)^2 &= x^4 + 9y^2 + 4z^6 - 6x^2y + 4x^2z^3 - 12yz^3\end{aligned}$$

Suma por la Diferencia de Dos Términos. -

Es igual a la diferencia de sus cuadrados. (Martínez, A., 2010)

Ejemplos:

$$\begin{aligned}(x+6)(x-6) &= x^2 - 36 \\ \left(\frac{1}{3} + n^3\right)\left(\frac{1}{3} - n^3\right) &= \frac{1}{9} - n^6\end{aligned}$$

Cubo de un Binomio. -

Es igual al cubo del primer término, más o menos el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo y más o menos el cubo del segundo término. (Martínez, A., 2010)

Ejemplos:

$$\begin{aligned}(x+z)^3 &= x^3 + 3x^2z + 3xz^2 + z^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (3x+5y)^3 &= 27x^3 + 135x^2y + 225xy^2 + 125y^3\end{aligned}$$

Diferencia de Cuadrados dividido entre sus raíces cuadradas. -

Es igual a la diferencia de dichas raíces y; el cociente de la diferencia de cuadrados, dividido entre la diferencia de sus raíces cuadradas, es igual a la suma de dichas raíces. (Martínez, A., 2010)

Ejemplos:

$$\frac{x^2 - 16}{x + 4} = x - 4$$

$$\frac{y^2 - 81}{y - 9} = y + 9$$

Suma o Diferencia de Cubos dividido entre sus Raíces Cúbicas. -

Es igual al cuadrado de la primera raíz más o menos el producto de la primera por la segunda y más el cuadrado de la segunda raíz. (Martínez, A., 2010)

Ejemplos:

$$\frac{x^3 + 27}{x + 3} = x^2 - 3x + 9$$

$$\frac{y^6 - 64}{y^2 - 4} = y^4 + 4y^2 + 16$$

TALLER

$$(y^2 + 9)(y^2 - 8) =$$

$$(z - 12)(z - 10) =$$

$$(x^2 - 4y)^2 =$$

$$(2x^3 + 5y^2)^2 =$$

$$(x^2 - 2y + 3z)^2 =$$

$$(2 - 3x - 4y)^2 =$$

$$(m - 3x)(m + 3x) =$$

$$(-2 + x)(x + 2) =$$

$$(4x + 3y)^3 =$$

$$\frac{(2x^3 + y^2)^3}{81 - c^2} =$$

$$\frac{25 - x^4 y^4}{x^2 y^2 + 5} =$$

$$\frac{m^3 + 8}{m + 2} =$$

$$\frac{x^3 - 27}{x - 3} =$$

TAREA

Identifica los productos notables, escribe su nombre y halla su resultado.

$$(x - 11)(x - 4) =$$

$$(x^2 + 2)(x^2 - 3) =$$

$$(7x - 4)^2 =$$

$$(w + 2x)^2 =$$

$$(2w - 4)^3 =$$

$$(z^2 + 3)^3 =$$

$$(2x - 3y + 5)^2 =$$

$$(w^2 - 2w + 2)^2 =$$

$$(ym + 3)(ym - 3) =$$

Determinar el cociente entre los siguientes polinomios:

$$(w^3 - 5w^2 + 5w + 3) \text{ entre } (w - 3)$$

$$(2x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 9x^2 - 17x + 21) \text{ entre } (2x^3 - x + 7)$$

$$(3z^5 + 4z^4 + 6z^3 - 8z^2 - 5z - 12) \text{ entre } (z^2 + 2z + 3)$$

Identificar el cociente notable, escribir su nombre y hallar el resultado.

$$\frac{x^2 - 49}{x - 7} =$$

$$\frac{8x^3 + 1}{2x + 1} =$$

$$\frac{125 + y^3}{5 + y} =$$

$$\frac{400x^4 - 64}{20x^2 - 8} =$$

$$\frac{x^3 - 8b^3}{x - 2b} =$$

$$\frac{8x^6 + y^3}{2x^3 + y} =$$

CAPÍTULO V

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

FACTORAR o DESCOMPONER EN FACTORES. Una expresión algebraica, significa establecer una forma de presentación de un polinomio en factores. (Martínez, A., 2010)

Esto quiere decir que una cierta cantidad de términos, puedan transformarse a factores.

RECOMENDACIÓN

Todos los casos de factoreo son susceptibles de comprobación, para lo cual se recomienda realizar la multiplicación de sus factores y obtendremos el mismo polinomio del cual partimos

APLICACIÓN:

$$a^2 + ab = a(a + b)$$

Como se puede observar la expresión de la izquierda (Suma) constituida por términos, se puede cambiar o transformar a una multiplicación, proceso que en algebra recibe el nombre de **factoreo o descomposición factorial**.

De lo anteriormente estudiado con respecto a los productos y cocientes notables, hemos de colegir que es lo contrario de la descomposición factorial

Con fines de facilitar el estudio y trámite de los diferentes casos que se presentan en este segmento de estudio, la didáctica recomienda establecer cronológicamente los siguientes escenarios:

FACTOR COMUN

Monomio y polinomio

FACTORIZACION DE BINOMIOS

- Suma o diferencia de potencias iguales impares (Suma o diferencia de cubos o sus múltiplos)
- Diferencia de potencias iguales pares (Diferencia de cuadrados o sus múltiplos)

FACTORIZACION DE TRINOMIOS (POLINOMIOS)

Trinomio cuadrado perfecto – Trinomio cuadrado por suma y resta, o incompleto – Trinomio de segundo grado con coeficiente, o de la forma $ax^2 + bx + c$ - Trinomio de segundo grado sin coeficiente, o de la forma $x^2 + bx + c$

DESCRIPCIÓN DE PROCESOS

- FACTOR COMÚN MONOMIO.

Este evento se produce cuando todos los términos de un polinomio **tienen un valor algebraico monómico en común**, es decir que se repite en todos y cada uno de ellos.

PROPUESTA

$$x^3 + 2x^2 - 3x$$

En la presente expresión observamos que se repite el valor **X**, por lo tanto, es factible que se pueda extraer el mismo para que multiplique a los cocientes respectivos.

PROCEDIMIENTO

Se extrae el valor monómico común con su menor exponente, luego dividimos cada término del polinomio para el factor extraído, cuyo cociente colocamos en el interior del paréntesis.

APLICACIÓN

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3)$$

- FACTOR COMÚN POLINOMIO.

Este evento se produce cuando todos los términos de un polinomio **tienen un valor algebraico polinómico común**, es decir que se repite en todos y cada uno de ellos.

PROPUESTA

$$2x(x+1) + 3y(x+1)$$

En la presente expresión observamos que se repite el valor $(x+1)$, por lo tanto es factible que se pueda extraer el mismo para multiplicarlo por los cocientes respectivos.

PROCEDIMIENTO

Se extrae el valor **polinómico común**, luego dividimos cada término del polinomio para el factor extraído, cuyo cociente colocamos en el interior del paréntesis.

APLICACIÓN

$$(x+1)(2x+3y)$$

- FACTORIZACION DE BINOMIOS

SUMA O DIFERENCIA DE POTENCIAS IGUALES IMPARES

(Suma o diferencia de cubos o sus múltiplos)

DIFERENCIA DE POTENCIAS IGUALES PARES

(Diferencia de cuadrados o sus múltiplos)

Trataremos los diferentes casos por separado.

- SUMA DE CUBOS

Reconocemos este evento cuando tenemos **la suma de dos términos que son cubos perfectos**

PROPUESTA

$$x^3 + 2^3$$

En el presente caso se observa que cada termino es un cubo perfecto por cuanto se puede extraer la raíz cubica exacta.

PROCEDIMIENTO

Se descompone en dos factores:

El primero es igual a la suma de las raíces cubicas de cada termino.

El segundo es un trinomio cuyos términos son: el cuadrado del primer término, menos el producto del primero por el segundo y, más el cuadrado del segundo término

APLICACIÓN

$$x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

OTRAS APLICACIONES

$$x^5 + 2^5 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

- DIFERENCIA DE CUBOS

Reconocemos este evento cuando tenemos **la diferencia de dos términos que son cubos perfectos**

PROPUESTA

$$x^3 - 2^3$$

En el presente caso se observa que cada termino es un cubo perfecto por cuanto se puede extraer la raíz cubica exacta.

PROCEDIMIENTO

Se descompone en dos factores:

El primero es igual a la diferencia de las raíces cubicas de cada termino.

El segundo es un trinomio cuyos términos son: el cuadrado del primer término, mas el producto del primero por el segundo y, más el cuadrado del segundo término

APLICACIÓN

$$x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

OTRAS APLICACIONES

$$x^5 - 2^5 = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$$

- DIFERENCIA DE POTENCIAS IGUALES PARES

(Diferencia de cuadrados o sus múltiplos)

Reconocemos este caso cuando tenemos **la diferencia de dos términos que son cuadrados perfectos**

PROPUESTA

$$x^2 - 2^2$$

En este caso se presenta la diferencia de potencias iguales cuyos exponentes son pares

PROCEDIMIENTO

Se descompone en dos factores:

El primero es igual a la diferencia de las raíces cuadradas de cada término

El segundo es igual a la suma de las raíces cuadradas de cada término

APLICACIÓN

$$x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$$

OTRAS APLICACIONES

$$\begin{aligned} x^4 - 2^4 &= (x^2 - 2^2)(x^2 + 2^2) \\ &= (x - 2)(x + 2)(x^2 + 2^2) \end{aligned}$$

$$x^6 - 2^6 = (x - 2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32)$$

$$x^6 - 2^6 = (x^3 - 2^3)(x^3 + 2^3)$$

- FACTORIZACION DE TRINOMIOS (POLINOMIOS)

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

El presente caso se lo reconoce cuando cumple las siguientes condiciones

Por estar formado por tres términos

Dos de ellos deben ser cuadrados perfectos (Su raíz cuadrada es exacta)

Uno de sus términos es igual al doble producto de la raíz de los dos anteriores

PROPUESTA

$$x^2 + 2xy + y^2$$

Se observa que dos de sus términos son cuadrados perfectos $\sqrt{x^2} = x$ $\sqrt{y^2} = y$

Uno de sus términos es el doble producto de las raíces anteriores $2(x)(y) = 2xy$

Como se puede observar, este trinomio cumple las dos condiciones básicas, por lo tanto, es un trinomio cuadrado perfecto.

PROCEDIMIENTO

Se descompone en un factor binomio, al cual lo elevamos al cuadrado.

Este factor está constituido por las raíces cuadradas de los dos términos, separados por el signo del término no cuadrático.

A este binomio lo elevamos al cuadrado.

$$(x + y)^2$$

O también podemos descomponerlo en dos factores binómicos con el mismo signo.

$$(x + y)(x + y)$$

APLICACIÓN

$$4x^2 + 20xy + 25y^2$$

$$(2x - 5y)^2$$

O también

$$(2x - 5y)(2x + 5y)$$

TRINOMIO CUADRADO POR SUMA Y RESTA

La condición fundamental para que sea este tipo de trinomio consiste en que el exponente de los términos que son cuadrados perfectos debe ser múltiplo de 2 pero mayor que 4

Reconocemos el presente caso cuando cumple las siguientes condiciones

Estar formado por tres términos

Dos de ellos deben ser cuadrados perfectos con exponentes 4 (Su raíz cuadrada debe ser exacta)

Uno de sus términos debe transformarse en el doble producto de la raíz de los dos anteriores sumándole un valor que sea cuadrado perfecto.

Para que no se altere el valor original, le restamos el mismo valor.

Con este proceso se consigue un caso especial de diferencia de cuadrados

PROPUESTA

$$4x^4 - 5x^2 + 1$$

Observamos que dos de sus términos son cuadrados perfectos $\sqrt{4x^4} = 2x^2$ $\sqrt{1} = 1$

Uno de sus términos no cumple la condición de ser el doble producto de las raíces anteriores

$$2(x^2)(1) = 2x^2$$

Como se puede observar debo sumar cierto valor que debe ser un cuadrado perfecto y, para que no se altere debo restarle el mismo, de esta manera consigo la diferencia de cuadrados.

PROCEDIMIENTO

Se transforma en un caso especial de diferencia de cuadrados

Se descompone en dos factores:

El primero es igual a la diferencia de las raíces cuadradas de cada término

El segundo es igual a la suma de las raíces cuadradas de cada término

$$4x^4 \quad - 5x^2 \quad + 1$$

$$2x^2 \quad \quad \quad 1$$

$$2(2x^2)(1)$$

$$4x^2$$

$$4x^4 \quad - 5x^2 \quad + 1$$

$$\quad + x^2 \quad \quad - x^2$$

$$4x^4 \quad - 4x^2 \quad + 1 \quad - x^2$$

$$(4x^4 - 4x^2 + 1) - x^2$$

$$(2x^2 - 1)^2 - (x)^2$$

$$(2x^2 - 1 + x)(2x^2 - 1 - x)$$

APLICACIÓN

$$25x^4 \quad + x^2 \quad + 1$$

$$5x^2 \quad \quad \quad 1$$

$$2(5x^2)(1)$$

$$\begin{array}{r}
 10x^2 \\
 \hline
 25x^4 \quad + x^2 \quad + 1 \\
 \quad + 9x^2 \quad \quad - 9x^2 \\
 \hline
 25x^4 \quad + 10x^2 \quad + 1 \quad - 9x^2 \\
 (25x^4 + 10x^2 + 1) - 9x^2 \\
 (5x^2 + 1)^2 - 9x^2 \\
 (5x^2 + 1 + 3x)(5x^2 + 1 - 3x)
 \end{array}$$

TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO SIN COEFICIENTE, O DE LA FORMA
 $x^2 + bx + c$

El presente caso se lo reconoce cuando cumple las siguientes condiciones

Estar formado por tres términos

- El Primero de ellos debe ser cuadrado perfecto (Su raíz cuadrada es exacta)
- Otro de sus términos debe estar constituido por un coeficiente a más de la raíz\ cuadrada del primero
- Un término independiente

PROPUESTA

$$x^2 + 3x + 2$$

Se observa que uno de sus términos es un cuadrado perfecto $\sqrt{x^2} = x$

El segundo término es un factor 3 multiplicado por la raíz del primero $3\sqrt{x^2} = 3x$

El tercer término es un valor independiente 2.

Por lo que acabamos de comprobar, este trinomio cumple las dos condiciones básicas anteriormente indicadas, por lo tanto, es un trinomio de segundo grado con una incógnita o de la forma $x^2 + bx + c$

PROCEDIMIENTO

Se descompone en dos factores binómicos,

El primer término de cada factor es igual a la raíz cuadrada del primer término del polinomio

Los segundos términos de cada factor están dados de tal manera que la suma de ellos nos de como resultado el segundo término del polinomio, y la multiplicación de los mismos nos de como resultado el tercer término del polinomio

$$(x + 2)(x + 1)$$

APLICACIÓN

$$x^2 - 8x - 20$$

$$(x - 10)(x + 2)$$

TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO CON COEFICIENTE, O DE LA FORMA

$$ax^2 + bx + c$$

Este caso se lo reconoce cuando cumple las siguientes condiciones

Estar formado por tres términos

- El Primero de ellos debe tener un coeficiente diferente a la unidad y su parte literal debe ser cuadrado perfecto (Su raíz cuadrada es exacta)
- Otro de sus términos debe estar constituido por un coeficiente a más de la raíz cuadrada del primero
- Un término independiente

PROPUESTA

$$2x^2 + 11x + 5$$

Se observa que uno de sus términos tiene un coeficiente diferente de la unidad (2) y su parte

literal es un cuadrado perfecto $\sqrt{x^2} = x$

El segundo término tiene un factor 11 multiplicado por la raíz del primero $11\sqrt{x^2} = 11x$

El tercer término es un valor independiente 5

Por lo que acabamos de comprobar, este trinomio cumple las dos condiciones básicas anteriormente indicadas, por lo tanto, es un trinomio de segundo grado con una incógnita o de la forma $x^2 + bx + c$.

PROCEDIMIENTO

Se multiplica a todo el trinomio por una fracción unitaria cuyos elementos sean iguales al del coeficiente transformándole de esta manera a un trinomio de segundo grado sin coeficiente

Por lo tanto, la solución es igual a la anterior

Debiendo al final dividir los factores para el coeficiente por el que inicialmente multiplicamos

Se descompone en dos factores binómicos, cuyo producto volverá a ser el polinomio original

$$(2x + 1)(x + 5)$$

APLICACIÓN

$$3x^2 - x - 2$$

$$(3x + 2)(x - 1)$$

IGUALDAD DE POLINOMIOS

CONCEPTO DE POLINOMIO. - Polinomio, suma o resta de monomios, cada uno de los cuales se denomina término del polinomio. También los monomios son considerados polinomios de un solo término. Los polinomios con dos términos se llaman binomios, y los de tres, trinomios. (Martínez, A., 2010)

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo componen.

Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal, o sea, tienen iguales letras afectadas de iguales exponentes:

Ejemplos:

$2a$ y a

$-5a^3b^2$ y $-8a^3b^2$

REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES. - Es una operación que tienen por objeto convertir en un solo término dos o más términos semejantes.

En la reducción de términos semejantes pueden ocurrir tres casos:

CASO I

Reducción de dos o más términos semejantes del mismo signo. - Se suman los coeficientes, poniendo delante de esta suma el mismo signo que tienen todos y a continuación se escribe la parte literal.

Ejemplos:

$$3a + 2a = 5a$$

$$-b^2 - 9b^2 = -10b^2$$

CASO II

Reducción de dos términos semejantes de distinto signo. - Se restan los coeficientes, poniendo delante de esta diferencia el signo del mayor y a continuación se escribe la parte literal.

Ejemplos:

$$-18x + 11x = -7x$$

$$-5c^3 + 8c^3 = 3c^3$$

CASO III

Reducción de más de dos términos semejantes de distinto signo. - Se reducen a un solo término todos los positivos, se reducen a un solo término todos los negativos y a los dos resultados obtenidos se aplica la regla anterior.

Ejemplos:

$$5b - 8b + b - 6b + 21b$$

$$5b + b + 21b = 27b$$

$$-8b - 6b = -14b$$

$$27b - 14b = 13b$$

ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

Primero realizamos la división entera de un polinomio $P(x)$ de grado “**m**” entre otro $Q(x)$ de grado “**n**” al proceso por el cual se obtienen otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$.

Donde:

P = dividendo

Q = divisor

C = cociente

R = residuo o resto

Para obtener los polinomios cociente y resto a partir de los polinomios dividendo y divisor se procede como en el ejemplo siguiente, con $P(x) = 5x^3 + 7x^2 - 3$ y $Q(x) = x^2 + 2x - 1$:

$$\begin{array}{r}
 5x^3 + 7x^2 \quad - 3 \quad \Big| \quad x^2 + 2x - 1 \\
 \underline{-5x^3 - 10x^2 + 5x} \\
 -3x^2 + 5x - 3 \\
 \underline{+3x^2 + 6x - 3} \\
 11x - 6
 \end{array}$$

El grado de $C(x) = m - n$,

Cuando el residuo de la división es cero, entonces se dice que la división es exacta y que el dividendo, $P(x)$, es múltiplo del divisor, o bien que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$.

Ahora podemos plantear el Algoritmo de la División entre polinomios, así:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

Ejemplo:

El divisor $Q(x) = x^2 + 2x - 1$, el cociente es $C(x) = 5x - 3$, y el residuo, $R(x) = 11x - 6$.

$$P(x) = (x^2 + 2x - 1) \cdot (5x - 3) + (11x - 6)$$

$$P(x) = 5x^3 - 3x^2 + 10x^2 - 6x - 5x + 3 + 11x - 6$$

$$P(x) = 5x^3 + 7x^2 - 3$$

$$P(x) = P(x) \text{ comprobado}$$

TALLER

Realizar los siguientes ejercicios

a) $-8m - m$

b) $-1/5 b^3 + 8/6 b^3$

c) $19m - 10m + 6m$

d) $-x + 19x - 18x$

e) $-3/5c + 1/4c - 1/2c$

Dividir y Realizar el Algoritmo

f) $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 10x + 8$ y $Q(x) = x^2 + 2x - 3$

g) $P(x) = 3x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 2x - 3$ y $Q(x) = x^2 + 2x - 1$

RADICACIÓN

Si una raíz indicada es exacta, tenemos una cantidad racional, y si no lo es, tenemos una cantidad irracional. (Martínez, A., 2010)

Simbólicamente lo expresamos de la siguiente manera:

Donde: $\sqrt[a]{n} = x$ ya que: $x^a = n$
 $a =$ índice
 $n =$ base o subradical
 $x =$ raíz
 Ejemplos:

$$\sqrt[3]{64} = 4 \quad \text{ya que: } 4^3 = 64$$

$$\sqrt[3]{27a^3} = 3a \quad \text{porque } (3a)^3 = 27a^3$$

Las raíces impares de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad subradical
 Ejemplos:

$$\sqrt[5]{-x^{10}} = -x^2 \quad \text{porque } (-x^2)^5 = -x^{10}$$

$$\sqrt[3]{-27a^3} = -3a \quad \text{porque } (-3a)^3 = -27a^3$$

Las raíces pares de una cantidad positiva tienen signo positivo y signo negativo.
 Ejemplos:

$$\sqrt{81a^3} = 9a \text{ o } -9a$$

Porque: $(9a)^2 = 81a^3$
 $(-9)^2 = 81a^3$

SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Se debe tomar en cuenta don casos importantes en la simplificación de radicales:

CASO I

Cuando la cantidad subradical contiene factores cuyo exponente es divisible por el índice.

$$\sqrt{9a^3} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = 3a\sqrt{a}$$

$$\sqrt[3]{250a^3b^8} = \sqrt[3]{2 \cdot 5^3 a^3 b^6 b^2} = 5ab^2 \sqrt[3]{2b^2}$$

CASO II

Cuando los factores de la cantidad subradical y el índice tienen un divisor común.

$$\sqrt[4]{4a^2} = \sqrt[4]{2^2 \cdot a^2} = 2^{2/4} \cdot a^{2/4} = 2^{1/2} \cdot a^{1/2} = \sqrt{2a}$$

$$\sqrt[6]{9a^2x^2} = \sqrt[6]{3^2 \cdot a^2 x^2} = 3^{2/6} \cdot a^{2/6} \cdot x^{2/6} = 3^{1/3} \cdot a^{1/3} \cdot x^{1/3} = \sqrt[3]{3ax}$$

REDUCCIÓN DE RADICALES AL MÍNIMO COMÚN ÍNDICE

Esta operación tiene por objeto convertir radicales de distinto índice en radicales equivalentes que tengan el mismo índice, para ello se aplica la siguiente regla:

REGLA

Se halla el Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.) de los índices, que será el índice común, y se eleva a cada cantidad subradical a la potencia que resulta de dividir el índice común entre el índice de su radical.

Ejemplo:

Reducir al mínimo común índice $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{2}$

El m.c.m. de los índices 2, 3 y 4 es 12. Este es el índice común, entonces tendremos:

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8}$$

TALLER

- a) $\sqrt{18}$
b) $\sqrt[4]{9}$
c) $\sqrt[10]{32x^{10}y^{15}}$
d) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{8}$
e) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[6]{7}$
f) $\sqrt[3]{x^2}, \sqrt[4]{2y}, \sqrt[6]{5m^7}$

OPERACIONES CON RADICALES

SUMA Y RESTA DE RADICALES

Se simplifican los radicales dados; se reducen los radicales semejantes y a continuación se escriben los radicales no semejantes con su propio signo.

Ejemplo:

Simplificar $2\sqrt{450} + 9\sqrt{12} - 7\sqrt{48} - 3\sqrt{98}$.

Simplificando, tendremos:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{450} &= 2\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 30\sqrt{2} \\ 9\sqrt{12} &= 9\sqrt{2^2 \cdot 3} = 18\sqrt{3} \\ 7\sqrt{48} &= 7\sqrt{2^4 \cdot 3} = 28\sqrt{3} \\ 3\sqrt{98} &= 3\sqrt{2 \cdot 7^2} = 21\sqrt{2} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{450} + 9\sqrt{12} - 7\sqrt{48} - 3\sqrt{98} &= 30\sqrt{2} + 18\sqrt{3} - 28\sqrt{3} - 21\sqrt{2} \\ &= (30 - 21)\sqrt{2} + (18 - 28)\sqrt{3} = 9\sqrt{2} - 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

II. MULTIPLICACIÓN DE RADICALES

Se multiplican los coeficientes entre sí y las cantidades subradicales entre sí, colocando este último producto bajo el signo radical común y se simplifica el resultado.

Si los índices de los radicales son diferentes, para poder realizar la multiplicación se deben reducir a un mismo índice común

Ejemplos:

Multiplicar $2\sqrt{15}$ por $3\sqrt{10}$.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{15} \times 3\sqrt{10} &= 2 \times 3\sqrt{15 \times 10} = 6\sqrt{150} \\ &= 6\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^2} = 30\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Multiplicar $5\sqrt{2a}$ por $\sqrt[3]{4a^2b}$.

Reduciendo los radicales al mínimo común índice tendremos:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2a} &= 5\sqrt[6]{(2a)^3} = 5\sqrt[6]{8a^3} \\ \sqrt[3]{4a^2b} &= \sqrt[6]{(4a^2b)^2} = \sqrt[6]{16a^4b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces } 5\sqrt{2a} \times \sqrt[3]{4a^2b} &= 5\sqrt[6]{8a^3} \times \sqrt[6]{16a^4b^2} = 5\sqrt[6]{128a^7b^2} \\ &= 5\sqrt[6]{2^6 \cdot 2 \cdot a^6 \cdot a \cdot b^2} = 10a\sqrt[6]{2ab^2} \end{aligned}$$

DIVISIÓN DE RADICALES

Se dividen los coeficientes entre sí y las cantidades subradicales entre sí, colocando este último cociente bajo el signo radical común y se simplifica el resultado.

Si los índices de los radicales son diferentes, para poder realizar la división se deben reducir a un mismo índice común

Ejemplos:

Dividir $2\sqrt[3]{81x^7}$ entre 3

$$2\sqrt[3]{81x^7} \div 3\sqrt[3]{3x^2} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{81x^7}{3x^2}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{27x^5} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{3^3 \cdot x^3 \cdot x^2} = 2x\sqrt[3]{x^2}$$

Dividir $\sqrt[3]{4a^2}$ entre $\sqrt[4]{2a}$.

$$\sqrt[3]{4a^2} = \sqrt[12]{(4a^2)^4} = \sqrt[12]{256a^8}$$

$$\sqrt[4]{2a} = \sqrt[12]{(2a)^3} = \sqrt[12]{8a^3}$$

Entonces: $\sqrt[3]{4a^2} \div \sqrt[4]{2a} = \sqrt[12]{256a^8} \div \sqrt[12]{8a^3} = \sqrt[12]{\frac{256a^8}{8a^3}} = \sqrt[12]{32a^5}$

RADICACIÓN DE RADICALES

Para extraer una raíz a un radical se multiplica el índice del radical por el índice de la raíz y se simplifica el resultado.

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{2\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3 \times 2]{2\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt[6]{2\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt[6]{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[6]{2}\sqrt[6]{\sqrt{2}}}{\sqrt[6]{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[6]{2}\sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{3}} = \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{3}}$$

$$\sqrt[5]{3\sqrt[3]{2\sqrt{\frac{5}{6}}}} = \sqrt[5 \times 3 \times 2]{3\sqrt[3]{2\sqrt{\frac{5}{6}}}} = \sqrt[30]{3\sqrt[3]{2\sqrt{\frac{5}{6}}}} = \sqrt[30]{\frac{3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{\sqrt{6}}}} = \frac{\sqrt[30]{3}\sqrt[30]{\sqrt[3]{2}}\sqrt[30]{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}}{\sqrt[30]{\sqrt[3]{\sqrt{6}}}} = \frac{\sqrt[30]{3}\sqrt[30]{2}\sqrt[30]{5}}{\sqrt[30]{6}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{(x+4)^4}{(x-2)^6}}} = \sqrt[6]{\frac{(x+4)^4}{(x-2)^6}} = \frac{\sqrt[6]{(x+4)^4}}{\sqrt[6]{(x-2)^6}} = \frac{\sqrt[6]{(x+4)^4}}{x-2} = \frac{(x+4)^{\frac{2}{3}}}{x-2}$$

TALLER

- $\sqrt{45} - \sqrt{27} - \sqrt{20}$
- $7\sqrt{450} - 4\sqrt{320} + 3\sqrt{80} - 5\sqrt{800}$
- $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{16}$
- $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{9}$
- $3\sqrt{6} \times \sqrt{14} \times 2\sqrt{35}$

CAPÍTULO VI

ECUACIONES

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA Y DOS INCOGNITAS. -

Ecuación lineal. En una ecuación lineal cada término está formado por un coeficiente y una incógnita no elevada a ninguna potencia, y términos que no tienen incógnita. Los términos con incógnita se llaman término en esa incógnita; los términos que no tienen incógnita se llaman términos independientes. (Martínez, A., 2010)

- Métodos de resolución

Método de reducción

El método de reducción consiste en multiplicar cada una de las ecuaciones por los valores necesarios, de forma que los coeficientes de una de las incógnitas sean los mismos cambiados de signo.

Conseguido esto, se suman las dos ecuaciones y la incógnita que tiene los coeficientes opuestos se elimina, dando lugar a una ecuación con una incógnita, que se resuelve haciendo las operaciones necesarias. Conocida una de las incógnitas se sustituye su valor en una de las ecuaciones originales y calculamos la segunda. (Hernández, J. , 2016)

Tomemos como ejemplo el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$$

En este caso la x , ya tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones cambiado de signo y no es necesario hacer ninguna operación para lograrlo; podemos sumar las dos ecuaciones directamente:

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 5 \\ -x & + & 2y = 4 \\ \hline & & 3y = 9 \end{array}$$

como resultado de la suma tenemos una sola ecuación con una incógnita:

$$3y = 9$$

$$y = \frac{9}{3}$$

$$y = 3$$

Para calcular el valor de x , sustituimos el valor de y en una de las ecuaciones, por ejemplo, la primera:

$$x + 3 = 5$$

$$x = 5 - 3$$

$$x = 2$$

El resultado del sistema es el valor de x e y que satisface las dos ecuaciones simultáneamente, que como ya sabíamos es:

$$x = 2$$

$$y = 3$$

Método de igualación

El método de igualación para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas consiste en despejar una de las dos incógnitas en las dos ecuaciones. Sea cual sea el valor de esta incógnita, ha de ser el mismo en las dos ecuaciones, por tanto podemos igualar las dos expresiones obteniendo una ecuación con una incógnita, que podemos resolver con facilidad. Una vez conocido el valor de una de las dos incógnitas lo sustituimos en una de las ecuaciones iniciales y calculamos la segunda. Aprovechando el mismo ejemplo anterior, veamos cómo se resuelve por igualación:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$$

despejamos en las dos ecuaciones una de las incógnitas, por ejemplo la x:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ x = 2y - 4 \end{cases}$$

el valor de x ha de ser el mismo en las dos ecuaciones, por lo tanto tenemos:

$$5 - y = 2y - 4$$

Pasando todos los términos con y a un miembro de la ecuación, y los términos independientes al otro:

$$-2y - y = -5 - 4$$

$$2y + y = 5 + 4$$

Operando tenemos:

$$3y = 9$$

$$y = \frac{9}{3}$$

$$y = 3$$

Con lo que tenemos el valor de y. Sustituyendo este valor en la primera ecuación y despejada la x, tenemos que si:

$$x = 5 - y$$

$$y = 3$$

Resulta que x vale:

$$x = 5 - 3$$

$$x = 2$$

la solución del sistema es:

$$x = 2$$

$$y = 3$$

Método de sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituirlo en la otra, dando lugar así a una ecuación con una incógnita. Una vez resuelta sustituimos su valor en la ecuación despejada y calculamos la segunda incógnita.

Empleando el mismo ejemplo de sistema veamos cómo se resolvería por el método de sustitución:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$$

Podemos despejar cualquiera de las dos incógnitas en cualquiera de las dos ecuaciones. Probemos primero despejando la x de la primera ecuación:

$$\begin{cases} x + y = 5 \rightarrow x = 5 - y \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$$

Si ahora sustituimos el valor de x despejado de la primera ecuación en la segunda, tenemos:

$$\begin{cases} x + y = 5 \rightarrow x = 5 - y \rightarrow \downarrow \\ -x + 2y = 4 \rightarrow \rightarrow \rightarrow -(5 - y) + 2y = 4 \end{cases}$$

resultando una sola ecuación en y , que podemos resolver:

$$-(5 - y) + 2y = 4$$

$$-5 + y + 2y = 4$$

$$y + 2y = 4 + 5$$

$$3y = 9$$

$$y = \frac{9}{3}$$

$$y = 3$$

con lo que ya tenemos el valor de y . Con este valor de y en la primera ecuación, despejamos la x :

$$x = 5 - y$$

$$y = 3$$

que resulta:

$$x = 5 - 3$$

$$x = 2$$

la solución del sistema es, por tanto:

$$x = 2$$

$$y = 3$$

Taller

Resolver las siguientes Ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 6y = 27 \\ 7x - 3y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x - 4y = 5 \\ 9x + 8y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x + 8y = -60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x + 16y = 7 \\ 4y + 3x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 9y = 42 \\ 12x + 10y = -4 \end{cases}$$

Tarea

$$\begin{cases} 10x + 18y = -11 \\ 16x - 9y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32x - 25y = 13 \\ 16x + 15y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x + 11y = 32 \\ 7y - 9x = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 5 = 7y - 9 \\ 6x = 3y + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 1 = 2(y + 6) \\ x + 6 = 3(1 - 2y) \end{cases}$$

Puesto que el tema de las ecuaciones es uno de los más importantes en la Matemática, comencemos recordando que toda ecuación es una igualdad entre dos expresiones, por ejemplo, $5x + 4 = 7x - 2$.

Veamos algunas propiedades y teoremas que se utilizan en las mismas.

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

En el conjunto de los números reales se consideran **cuatro propiedades de la igualdad**.

- 1: Para todo a número real, $a = a$. (Propiedad reflexiva)
 Ej. $3x+2 = 3x+2$
- 2: Para todo a, b números reales, si $a=b$, entonces $b=a$.
 (Propiedad simétrica)
 Ej. Si $2x+5 = 7$, entonces $7 = 2x+5$
- 3: Para todo a, b, c números reales,
 si $a=b$ y $b=c$, entonces $a=c$ (propiedad transitiva)
 Ej. Si $4x = 2x+8$ y $2x+8 = 3x+4$, entonces $4x = 3x+4$.
- 4 : Para todo a, b números reales, si $a = b$, entonces
 a puede ser sustituido por b en cualquier expresión.
 (propiedad de sustitución)
 Ej. Si $5x+7 = 2x-4$ y $x = 2m$, sustituyendo tenemos:
 $5(2m) + 7 = 2(2m)-4$. (Molina, J. , 2018)

Ejercicios

En los ejercicios siguientes indicar la propiedad que se ha utilizado.

- a) si $x = \sqrt{2}$, entonces $\sqrt{2} = x$
- b) si $3/4 = x$ y $x = y$, entonces $3/4 = y$
- c) $\sqrt{3} = \sqrt{3}$
- d) si $x = z$ y $x + 5 = 12$, entonces $z + 5 = 12$

PROPIEDADES ADITIVA Y MULTIPLICATIVA DE LA IGUALDAD

Si a la igualdad $-5 = 3 - 8$
 le sumamos la igualdad $12/3 = 4$ obtenemos también
 la igualdad $-5 + 12/3 = 3 - 8 + 4$
 es decir la igualdad $-1 = -1$ que es una proposición verdadera.

Como esto se cumple para todos los números reales generalizamos con el siguiente teorema.

Teorema 1.- (Propiedad aditiva de la igualdad).

Sean a, b, c y d cuatro números reales:

$$\begin{array}{l} \text{Si } a = b \\ \text{y } c = d \\ \hline \text{entonces } a + c = b + d. \end{array}$$

Similarmente si el caso fuera una multiplicación

$$\begin{array}{l} -5 = 3 - 8 \\ 12/3 = 4 \\ \hline \text{tendríamos } (-5)(12/3) = (3 - 8)(4) \end{array}$$

$-20 = -20$ que es una proposición verdadera.

lo que se generaliza en el siguiente teorema:

Teorema 2.- (Propiedad multiplicativa de la igualdad).

Sean a, b, c y d cuatro números reales

$$\text{Si } a = b$$

$$\text{y } \frac{c = d}{a c = b d.}$$

$$\text{entonces } a c = b d.$$

PROPIEDADES CANCELATIVAS DE LA ADICIÓN Y LA MULTIPLICACIÓN

Teorema 3.- (Propiedad cancelativa de la adición). Sean a, b, c tres números reales,

Si $a + c = b + c$ entonces cancelando c se tiene que $a = b$.

Observación. - Esta propiedad nos permite suprimir un sumando cuando este aparece en los dos miembros de una igualdad. Así, por ejemplo:

sí $x + 7 = 5 + 7$, entonces $x = 5$.

Teorema 4.- (Propiedad cancelativa de la multiplicación).

Sean a, b, c tres números reales,

Si $a c = b c$ con $c \neq 0$, entonces cancelando c se tiene que $a = b$.

Ejemplos:

a) Si $5x = 10 \Rightarrow 5 \cancel{x} = 5 \cdot 2 \Rightarrow x = 2$

b) $(2x + 3)(\cancel{x - 1}) = 7(\cancel{x - 1})$

$$2x + 3 = 7$$

$$\Rightarrow 2x + 3 = 3 + 4$$

$$\Rightarrow 2x = 4$$

$$\Rightarrow 2x = 2 \cdot 2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

Ejercicios:

En los siguientes ejercicios indique la propiedad que se ha utilizado:

a) Si $3x + 2 = 6$

y $2x - 5 = x + 3$

entonces $5x - 1 = x + 9$

b) Si $2x + 5 = y - 1$

y $z = 6$,

entonces $(2x + 5) \cdot z = (y - 1) \cdot 6$

c) si $x + y + z = z - 2$, entonces $x + y = -2$

d) si $3x = 2$ y -4 , entonces $-12x = -8$

e) si $8x = 32$, entonces $x = 4$

ECUACIÓN LINEAL O DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Se llama *ecuación lineal* o de *primer grado* con una incógnita a toda expresión de la forma $ax + b = 0$ con a y $b \in \mathbf{R}$ y $a \neq 0$

Ejemplos:

- a) $2x + 3 = 0$ aquí $a=2$ y $b=3$
- b) $4x = 6x - 5$
- c) $3ax - 5 = ax$

Como las expresiones de los ejemplos b) y c) no tienen la forma de la ecuación lineal ($ax+b=0$), por la aplicación de las propiedades y teoremas estudiados, tomarán dicha forma. Así por ejemplo si $4x = 6x - 5$,

entonces

$$\begin{aligned} 4x - 6x + 5 &= 0 \\ -2x + 5 &= 0 \quad \text{aquí } a=-2 \quad \text{y } b=5 \end{aligned}$$

En toda ecuación aparecen valores que son conocidos o se suponen conocidos, mientras otros símbolos, representan valores que son desconocidos o incógnitas; así por ejemplo en la ecuación $3ax - 5 = ax$, 3 y 5 son los valores conocidos, a se supone conocido, mientras que x es la incógnita.

Como una ecuación es una igualdad entre dos expresiones, la expresión que está a la izquierda del signo $=$ se llama *primer miembro* y la que está a la derecha se llama *segundo miembro*, así en el ejemplo c) $3ax - 5$ es el primer miembro y ax es el segundo miembro.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES

Resolver una ecuación es determinar el valor de la incógnita que hace cierta la igualdad. Este valor se llama *solución* o *raíz* de la ecuación;

así por ejemplo en la ecuación $2x + 3 = 0$, la raíz es $x = -\frac{3}{2}$ por cuanto la ecuación se reduce a la igualdad $2(-\frac{3}{2}) + 3 = 0$, o sea $-3+3=0$ es decir, $0=0$ que es verdadera.

En general la solución de toda ecuación lineal viene dada en el siguiente teorema:

Teorema. - La solución de la ecuación lineal

$$ax + b = 0 \quad \text{tiene la forma } x = -\frac{b}{a}$$

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones lineales enteras:

a) $3x - 4 = 7x + 8$

Solución: A fin de que se elimine $7x + 8$ en el segundo miembro, sumemos a la ecuación $-7x - 8$, así:

$$3x - 4 - 7x - 8 = 7x + 8 - 7x - 8.$$

Sumando términos semejantes tenemos:

$$-4x - 12 = 0$$

que es una ecuación de la forma $ax + b = 0$ con $a = -4$ y $b = -12$; por tanto, aplicando el teorema anterior

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{-12}{-4} \quad y$$

$$x = -3 \text{ es la raíz o solución de la ecuación } 3x - 4 = 7x + 8$$

Verificación: Reemplazando $x = -3$ en la ecuación original resulta

$$3(-3) - 4 = 7(-3) + 8$$

$$-9 - 4 = -21$$

$$-13 = -13,$$

igualdad que es verdadera.

b) $4(x-5)(x+2) = 11 - 3[x(x+2) + 3] + 7x^2$

Solución: Suprimiendo los signos de agrupación se tiene

$$4(x^2 - 3x - 10) = 11 - 3[x^2 + 2x + 3] + 7x^2$$

$$4x^2 - 12x - 40 = 11 - 3x^2 - 6x - 9 + 7x^2 \quad / \text{ sumando a los dos miembros}$$

$$-11 + 3x^2 + 6x + 9 - 7x^2$$

$$\text{se tiene } 4x^2 - 12x - 40 - 11 + 3x^2 + 6x + 9 - 7x^2 = 0$$

suprimiendo términos semejantes $-6x - 42 = 0$ y aplicando el teorema anterior

$$x = -\frac{-42}{-6}$$

$$x = -7.$$

Verificación: Reemplazando $x = -7$ en la ecuación original

$$4(-7-5)(-7+2) = 11 - 3[-7(-7+2) + 3] + 7(-7)^2$$

$$4(-12)(-5) = 11 - 3[-7(-5) + 3] + 7(49)$$

$$4(60) = 11 - 3[38] + 343$$

$$240 = 11 - 114 + 343$$

$$240 = 240, \text{ igualdad que es verdadera.}$$

VALOR NUMÉRICO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Calcular el valor numérico de una expresión algebraica significa reemplazar todos los elementos literales existentes en ella, por la respectiva asignación numérica

$$(5x^3 + 2y^2 - 3xz + 1)$$

Para los siguientes valores:

$$X = 1 \quad Y = 2 \quad Z = 3$$

PROCEDIMIENTO

Lo que hacemos es reemplazar los literales por los números respectivos

$$5(1)^3 + 2(2)^2 - 3(1)(3) + 1$$

$$5(1) + 2(4) - 3(1)(3) + 1$$

$$5 + 8 - 9 + 1 = 5$$

TAREA DE VALOR NUMÉRICO

Problemas de los textos para consulta del estudiante

TAREA DE ECUACIONES

1.- Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

$$3x - 4 = 7x + 8$$

$$4 - 2x = 3x + 14$$

$$3x - (x + 3) = x + 4$$

$$2x - 8(x - 3) = 5(x + 4)$$

$$2(x - 3) - 4(3 - x) + 9 = 10 - 4(3 - x)$$

$$2x - 5[x - (2x + 3)] = 6$$

$$(x + 4)(x + 2) + 2(x - 3)(x + 1) = 3x(x + 5)$$

$$(2x + 3)^2 + 10x = 3 + (3 - 5x)^2$$

$$2 - [2x - (3x - 2)] = 5x + \{6 - [2x - 4(x + 1)]\}$$

2.- Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

$$a) 12x - 3(x - 2) = 3(x + 4)$$

$$b) 8(x - 2) - 5(3 - x) + 16 = 15 - 4(3 - x)$$

$$c) 5x - 3[x - (2x - 1)] = 3$$

$$d) (x + 1)(x + 4) + 3(x - 2)(x - 1) = 4x(x - 6)$$

$$e) (5x + 3)^2 + 10x = 4 + (7 - 5x)^2$$

$$f) 22 - [3x - (2x - 1)] = 5x + \{6 - [2x - 7(x - 1)]\}$$

Ahora vamos a resolver las siguientes ecuaciones lineales fraccionarias:

$$a) \frac{x-5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4x+2}{9}$$

Solución: El m.c.m. = 18 y aplicando la propiedad distributiva,

$$18\left(\frac{x-5}{6} + \frac{1}{2}\right) = 18\left(\frac{4x+2}{9}\right)$$

$$\begin{aligned}
 3(x-5) + 9 &= 2(4x+2) \\
 3x - 15 + 9 &= 8x + 4 && / \text{ sumando } -8x - 4 \\
 3x - 15 + 9 - 8x - 4 &= 0 \\
 -5x - 10 &= 0 && \text{ y por el teorema} \\
 x = -\frac{-10}{-5} & \quad \text{luego} \quad x = -2
 \end{aligned}$$

Verificación:

$$\begin{aligned}
 \frac{-2-5}{6} + \frac{1}{2} &= \frac{4(-2)+2}{9} \\
 \frac{-7}{6} + \frac{1}{2} &= \frac{-8+2}{9} \\
 \frac{-7+3}{6} &= \frac{-6}{9} \\
 \frac{-4}{6} &= \frac{-6}{9} \\
 \frac{-2}{3} &= \frac{-2}{3}
 \end{aligned}$$

igualdad que es verdadera.

En la práctica la multiplicación por el m.c.m. se realiza mentalmente y como consecuencia se suprimen los denominadores.

b)
$$\frac{2x+1}{5} + \frac{3x+2}{3x+3} = \frac{6x+1}{15} + \frac{41}{5}$$

Solución: El m.c.m. es 15 (2x + 3).

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por el m.c.m. se tiene
 $(2x+1) \cdot 3(2x+3) + (3x+2) \cdot 15 = (6x+1) \cdot (2x+3) + 4 \cdot 3(2x+3)$
 efectuando las operaciones indicadas
 $12x^2 + 24x + 9 + 45x + 30 = 12x^2 + 20x + 3 + 24x + 36$
 sumando los términos opuestos del segundo miembro
 $12x^2 + 24x + 9 + 45x + 30 - 12x^2 - 20x - 3 - 24x - 36 = 0$
 $25x = 0$

aplicando el teorema anterior

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-0}{25} \\
 x &= 0
 \end{aligned}$$

Verificación:

$$\frac{2(0)+1}{5} + \frac{3(0)+2}{2(0)+3} = \frac{6(0)+1}{15} - \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{1}{15} + \frac{4}{5}$$

$$\frac{3+10}{15} = \frac{1+12}{15}$$

$$\frac{13}{15} = \frac{13}{15}$$

Igualdad que es verdadera.

TAREA

1.- Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias:

a) $\frac{x+3}{2} - \frac{2-3x}{7} = \frac{4x}{3}$

b) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = -\frac{x-5}{5}$

c) $5 + \frac{x}{4} = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{x}{2} \right) - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \left(10 - \frac{5x}{3} \right)$

d) $\frac{2x}{x-1} - 2 = \frac{3}{x+1}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE EL USO DE ECUACIONES

Resolver problemas aplicados a diversos campos de la ciencia es el aporte más grandioso que pueden hacer las ecuaciones. En general todos los problemas se expresan en forma verbal y antes de poder utilizar nuestras herramientas algebraicas es necesario traducir ese lenguaje verbal a un lenguaje algebraico correspondiente.

He aquí algunos ejemplos:

Lenguaje verbal

Un número par

Un número impar

Tres números enteros consecutivos:

Lenguaje algebraico

$2x$ (siendo $X \in \mathbb{Z}^+$)

$2x + 1$ (o también $2x - 1$)

$x; x+1; x+2$ siendo x el menor.

Si Jorge tiene x dólares y Marcelo tiene 5 más que Jorge, entonces Marcelo tiene $(x+5)$ dólares. Si Santiago tiene 3 menos que Jorge, entonces Santiago tiene $(x-3)$ dólares.

Si x es el número de días que se requiere para realizar un trabajo, $1/x$ es la parte del trabajo realizado en un día.

TAREA

Escribir una ecuación algebraica que represente la siguiente situación:

- a) El $\frac{1}{3}$ de una magnitud x es igual a 3.000
.....
- b) La suma de dos números es igual a 300, siendo el uno el triple del otro.
.....
- c) La diferencia de dos números es igual a 20, sabiendo que el uno sobrepasa al otro en 12 unidades,
.....
- d) El área de un triángulo es 18, si la altura es menor que la base en 3 metros
.....
- e) La diferencia entre el duplo de un número más 4 es 15
.....

Para la resolución de un problema planteado, se sugiere seguir el siguiente procedimiento de cuatro pasos mediante el uso de una ecuación de primer grado con una incógnita, así:

Paso 1.- Representación: Entendido el problema, representamos por x la cantidad desconocida o incógnita que debemos encontrar y expresamos todas las demás cantidades en términos de x ,

Paso 2.- Planteo: Con la información del problema, expresamos por medio de igualdades las relaciones que existen entre sus datos,

Paso 3.- Resolución: Resolvemos la ecuación planteada,

Paso 4.- Verificación: Comprobamos la solución encontrada en el enunciado original del problema, transformando la expresión a forma verbal.

Ejemplos:

- a) La suma de tres números es -5. El segundo es la mitad del primero y el tercero es 25, menos que el segundo. ¿Cuáles son los números?

Paso 1.- Representación: Decidamos llamar x al primero, entonces.

El segundo es la mitad del primero: $\frac{x}{2}$

El tercero es 25 menos que el segundo: $\left(\frac{x}{2} - 25\right)$

Paso 2.- Planteo: La suma de los tres primeros números es -5, se expresa por:

$$x + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2} - 25\right) = -5$$

Paso 3.- Resolución: Para despejar x tenemos que el mcm = 2, por tanto

$$2x + x + x - 50 = -10$$

$$4x - 50 = -10 \quad / \text{ Sumando } +10$$

$$4x - 50 + 10 = 0$$

$$4x - 40 = 0 \quad / \text{ Aplicando el teorema estudiado}$$

$$x = -\frac{-40}{4} \quad \text{entonces } x = 10$$

Paso 4.- Verificación: El primer número es 10; el segundo es 5 (la mitad), el tercero es -20 (25 menos que el segundo); por tanto, su suma será:

$$10 + 5 + (-20) = -5 \text{ como queríamos comprobar.}$$

b) Un señor tiene 6 años más que su esposa. Hace 12 años tenía el doble de la edad de ella. ¿Cuántos años tiene?

Paso 1.- Representación: Designemos por x la edad actual del señor

La edad actual de la señora será $(x-6)$

Hace 12 años el esposo tenía $x-12$

Hace 12 años su esposa tenía $(x-6)-12$, o sea $(x-18)$

Paso 2.- Planteo: Hace 12 años el señor tenía el doble de la edad de su esposa $x-12 = 2(x-18)$

Paso 3.- Resolución: Resolviendo tenemos:

$$x-12 = 2x + 36 \quad / \text{Sumando } -2x+36$$

$$x - 12 - 2x + 36 = 0$$

$$-x + 24 = 0$$

$$x = -\frac{24}{-1}$$

$$x = 24.$$

Paso 4.- Verificación: La edad actual del señor es 24 años. Su esposa tiene 18.

c) Un joven estudiante puede cortar el césped de su jardín en 4 horas; un compañero puede hacer el mismo trabajo en 6 horas. ¿En cuántas horas pueden cortar el césped trabajando juntos?

Paso 1.- Representación: Sea x el número de horas que se requiere para cortar el césped trabajando juntos.

Entonces $1/x$ es la parte del césped cortado por los dos en 1 hora. Por tanto, $1/4$ es la parte del césped cortado por el estudiante en 1 hora y $1/6$ es la parte del césped cortada por su compañero en la misma hora.

Paso 2.- Planteo: Entonces, trabajando juntos en 1 hora pueden cortar,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

Paso 3.- Resolución: Resolviendo tenemos que el m.c.m es $12x$, luego

$$12 = 3x + 2x \quad / \text{Sumando } -3x - 2x$$

$$12 - 3x - 2x = 0$$

$$12 - 5x = 0$$

$$-5x + 12 = 0$$

$$x = -\frac{12}{-5} \quad x = 2,4$$

Paso 4.- Verificación: Si los dos trabajan juntos, cortarán el césped en 2.4 horas; es decir, en una hora cortarán $\frac{1}{2,4} = \frac{5}{12}$ del total.

Como cada uno aporta $1/4$ y $1/6$ entonces $1/4 + 1/6 = 5/12$ como podemos demostrar.

TAREA

Resolver los siguientes problemas:

- 1.- El número de balas que tiene Marco es el doble de las que tiene Julio y entre ambos suman 36. Hallar el número de balas que tiene cada uno.
- 2.- El ancho de un rectángulo es $\frac{2}{3}$ de su largo; el área es 54 cm^2 . Hallar las dimensiones del rectángulo.
3. Cierta tarea puede ser efectuada por Juan en 3 horas, por Pedro en 4 horas y por Carlos en 6 horas. ¿Cuánto tiempo necesitarán para efectuar los trabajos juntos?
4. Andrés y Wilson trabajando juntos pueden hacer cierta tarea en 8 horas, y Andrés solo puede hacerlo en 12 horas, ¿Cuánto tiempo necesitará Wilson para hacerlo solo?
5. Luis puede pintar una casa en 8 días y Marcelo puede hacerlo en 6 días, ¿Cuánto tiempo necesitará Marcelo para terminar el trabajo después de que ambos han trabajado juntos durante 3 días?
6. Dos hermanos se turnaban para lavar el auto de la familia en los fines de semana. Nicolás lavaba el auto en 45 minutos, mientras que Sebastián solo tardaba 30 minutos. Una mañana tenían prisa por llegar a un juego de fútbol, por lo que decidieron lavar el auto entre los dos. ¿En qué tiempo lo hicieron?
7. Al inicio de clases, la familia Pérez gastó \$224 en la nueva ropa escolar de sus dos hijos. Si la ropa del mayor de sus hijos costó $\frac{1}{3}$ del costo de la ropa del menor, ¿cuánto gastaron por cada niño?

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES (1^{ER} GRADO)

SISTEMA DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS. -

Todo conjunto de ecuaciones que deben verificarse simultáneamente para unos mismos valores de las incógnitas recibe el nombre de sistemas de ecuaciones (Martínez, A., 2010)
Un sistema de ecuaciones de 1^{er} Grado con n-incógnitas tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \dots + d_1v &= h_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots + d_2v &= h_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + \dots + d_3v &= h_3 \\ &\vdots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \dots + d_nv &= h_n \end{aligned}$$

La solución de un sistema de ecuaciones es un grupo de valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema y se denominan raíces o soluciones.

Para que un sistema de ecuaciones de ecuaciones de 1^{er} grado con n-incógnitas tenga una única solución, es necesario que este formado por igual número de ecuaciones distintas y compatibles.

Resolver un sistema es hallar sus soluciones.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES. –

En general son sistemas determinados aquellos sistemas que tienen igual número de ecuaciones independientes que de incógnitas, son indeterminados los que tienen menor número de ecuaciones independientes que de incógnitas; son imposibles los que tienen mayor número de ecuaciones independientes que de incógnitas. (Martínez, A., 2010)

SISTEMAS EQUIVALENTES. - Dos sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones

ECUACIÓN INDEPENDIENTE. - Una ecuación de un sistema dado es independiente cuando es imposible reducirla por medio del cálculo en otra equivalente con otra cualquiera del sistema dado. Por ejemplo:

$$x - 4y = 5$$

$$x - y = 8$$

ECUACIÓN INCOMPATIBLE. - Una ecuación de un sistema dado se dice incompatible con las demás ecuaciones de un mismo sistema, cuando no admite con estas un sistema de soluciones comunes. Por ejemplo:

$$x + 2y = 4$$

$$x + 2y = -6$$

Son incompatibles, pues siendo los dos primeros miembros idénticos, los segundos deberían serlo también.

COMPROBACIÓN. -

Se realiza sustituyendo la solución en las ecuaciones, debiéndose hallar en toda una identidad.

SISTEMA DE DOS ECUACIONES SIMULTÁNEAS DE 1^{ER} GRADO CON DOS INCÓGNITAS. -

Este sistema tiene la siguiente forma general:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Para resolver el sistema el procedimiento a seguirse es el siguiente:

1. Numerar las ecuaciones.
2. Eliminar una incógnita, esto es, transformar el sistema en otro equivalente, en el que aparezca una de las ecuaciones con una incógnita.
3. Resolver esta ecuación con una incógnita.
4. Sustituir la raíz obtenida en una de las ecuaciones propuestas, cuya resolución nos dará el valor de la otra incógnita.

Para eliminar la incógnita podemos utilizar los siguientes métodos.

- a. Método de eliminación por igualación
- b. Método de eliminación por sustitución
- c. Método de eliminación por reducción (suma y resta)

MÉTODO DE ELIMINACIÓN POR IGUALACIÓN. - Para resolver un sistema lineal con dos ecuaciones se procede así:

1. Se numera las ecuaciones
2. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones
3. Se igualan las expresiones obtenidas
4. Se resuelve la ecuación con una incógnita así obtenida
5. El valor hallado para dicha incógnita se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones originales para así obtener la otra incógnita.

EJERCICIO. –

1.- Sea el sistema:

$$\begin{cases} (1) & 4x - y = -5 \\ (2) & 5y + 8x = 32 \end{cases}$$

Tenemos las ecuaciones (1) y (2), procedemos a despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones. Despejamos x en (1) y (2)

De (1): $x = \frac{-5 + y}{4}$

De (2): $x = \frac{32 - 5y}{8}$

Luego procedemos a igualar los dos valores de x que hemos obtenido:

$$\frac{-5 + y}{4} = \frac{32 - 5y}{8}$$

Resolvemos esta ecuación con una incógnita

$$\begin{aligned} 8(-5 + y) &= 4(32 - 5y) \\ -40 + 8y &= 128 - 20y \\ 28y &= 168 \\ y &= \frac{168}{28} \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Sustituimos el valor de y en cualquiera de las ecuaciones dadas. y en (1):

$$\begin{aligned} 4x - 6 &= -5 \\ 4x &= -5 + 6 \\ 4x &= 1 \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

El par de valores: $x = 1/4 \wedge y = 6$ es la solución del sistema propuesto

Resolver: $\begin{cases} (1) & 7x + 4y = 13 \\ (2) & 5x - 2y = 19 \end{cases}$

SOL: $x = 3 \wedge y = -2$

MÉTODO DE ELIMINACIÓN POR SUSTITUCIÓN. - Para resolver un sistema lineal con dos ecuaciones por el método de sustitución, se procede así:

1. Se numeran las ecuaciones.
2. Se despeja una incógnita cualquiera, en una de las ecuaciones, por ejemplo x .
3. Se sustituye su valor en la otra ecuación, obteniéndose con eso una ecuación en la que esta eliminada x .
4. Se resuelve la ecuación que tiene una sola incógnita y
5. Conocido el valor de y , se sustituye su valor en la expresión de x

EJERCICIO

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 15 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$$

Numeramos el sistema:

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} 3x + y = 15 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$$

Despejamos una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones. Por ejemplo, x de (1) y tendremos.

De (1): $x = \frac{15 - y}{3}$ (3)

Este valor de x sustituimos en la ecuación (2)

$$5\left(\frac{15 - y}{3}\right) - 4y = 8$$

Resolvemos esta ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{75 - 5y}{3} - 4y &= 8 \\ 75 - 5y - 12y &= 24 \\ -17y &= -51 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

El par de valores: $x = 4 \wedge y = 3$, son la solución del sistema propuesto.

Sea el sistema:

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} 2x + 5y = -24 \\ 8x - 3y = 19 \end{cases}$$

SOL: $x = 1/2 \wedge y = -5$

MÉTODO DE ELIMINACIÓN POR REDUCCIÓN

Llamado también de Suma y Resta o de Multiplicación por Factores Determinados. En este método se igualan los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar en las dos ecuaciones, para lo cual vamos a seguir la siguiente regla:

1. Se numeran las ecuaciones y se expresan en la forma general.
2. Determinamos el MCM de los coeficientes de la incógnita que se desea eliminar.
3. Dividimos el MCM por el coeficiente de la incógnita a eliminar en la primera ecuación. El cociente es el multiplicador que hay que usar para la primera ecuación.
4. Igualmente, dividiendo el MCM por el coeficiente de dicha incógnita en la segunda ecuación se obtiene el multiplicador correspondiente a la segunda ecuación.
5. Se suman o restan ambas ecuaciones, según se tenga distinto o igual signo en los términos que se van a eliminar.
6. Se despeja la incógnita en la ecuación resultante, y este valor se sustituye en una de las ecuaciones primitivas para hallar el valor de la otra incógnita.

EJERCICIO

Resolver el sistema:
$$\begin{cases} 9x + 8y = -6 \\ 12x - 7y = 45 \end{cases}$$

Numeramos las ecuaciones:
$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} 9x + 8y = -6 \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} 12x - 7y = 45 \end{cases} \end{aligned}$$

Vamos a eliminar la x , por lo que debemos calcular el MCM entre 9 y 12. El MCM = 36 por lo que:

$$\begin{array}{ll} 36 \div 9 = 4 & \text{Multiplicador de la Ecuación (1)} \\ 36 \div 12 = 3 & \text{Multiplicador de la Ecuación (2)} \end{array}$$

Con lo que tenemos

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} 36x + 32y = -24 \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} 36x - 21y = 135 \end{cases} \end{aligned}$$

Como los dos signos son iguales, restamos la segunda ecuación de la primera:

$$\begin{array}{r} 36x + 32y = -24 \\ -36x + 21y = -135 \\ \hline 53y = -159 \\ y = -3 \end{array}$$

Sustituyendo y en (1) o en (2). y en (1):

$$\begin{array}{ll} 9x + 8(-3) = -6 & \\ 9x - 24 = -6 & \\ 9x = 18 & x = 2 \end{array}$$

El par de valores: $x = 2 \wedge y = -3$. Constituyen la solución del sistema propuesto

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} (1) & 5x + 6y = 20 \\ (2) & 4x - 3y = -23 \end{cases}$$

SOL: $x = -2 \wedge y = 5$

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} (1) & 10x + 9y = 8 \\ (2) & 8x - 15y = -1 \end{cases}$$

Vamos a igualar los coeficientes de x , el MCM de 10 y 8 es 40, por lo que:

la (1).4, y la (2).5

Como los dos coeficientes tienen signos iguales se restan ambas ecuaciones

$$\begin{array}{r} 40x + 36y = 32 \\ -40x + 75y = 5 \\ \hline 111y = 37 \\ y = 37/111 \\ y = 1/3 \end{array}$$

Sustituyendo y en (2)

$$\begin{array}{r} 8x - 15(1/3) = -1 \\ 8x - 5 = -1 \\ 8x = 4 \\ x = 1/2 \end{array}$$

$\therefore x = 1/2 \wedge y = 1/3$ son la solución del sistema propuesto

Resolver el Sistema:

$$\begin{cases} (1) & 3x - (4y + 6) = 2y - (x + 18) \\ (2) & 2x - 3 = x - y + 4 \end{cases}$$

SOL: $x = 3 \wedge y = 4$

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} (1) & 3(2x + y) - 2(y - x) = -4(y + 7) \\ (2) & 3(2y + 3x) - 20 = -53 \end{cases}$$

Poniendo el sistema en la forma general.

$$\begin{array}{lcl} \text{De (1):} & 6x + 3y - 2y + 2x = -4y - 28 & \text{De (2): } 6y + 9x - 20 = -53 \\ & 8x + 5y = -28 & 9x - 6y = -33 \\ & & 3x - 2x = -11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} 8x + 5y = -28 \\ 3x + 2y = -11 \end{array} \right. \end{array}$$

Igualamos los coeficientes de x.

$$\begin{array}{r} 3(1) - 8(2) \\ 24x + 15y = -84 \\ \underline{-24x - 16y = 88} \\ -y = 4 \\ y = -4 \end{array}$$

Sustituyendo y en (2)

$$\begin{array}{r} 3x + 2(-4) = -11 \\ 3x - 8 = -11 \\ 3x = -3 \\ x = -1 \end{array}$$

$\therefore x = -1 \wedge y = -4$ son la solución del sistema

Resolver el sistema: (1)

$$\begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} x - \frac{3x+4}{7} = \frac{y+2}{3} \\ 2y - \frac{5x+4}{11} = \frac{x+24}{2} \end{array} \right. \end{array}$$

SOL: $x = 8 \wedge y = 10$

7.- Resolver el sistema:

$$\begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+y}{x-y} = -\frac{2}{7} \\ \frac{8x+y-1}{x-y-2} = 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Expresando en la forma general

$$\begin{array}{l} \text{De (1)} \quad 7(x+y) = -2(x-y) \\ \quad 7x + 7y = -2x + 2y \\ \quad 9x + 5y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{De (2)} \quad 8x + y - 1 = 2(x-y-2) \\ \quad 8x + y - 1 = 2x - 2y - 4 \\ \quad 6x + 3y = -3 \\ \quad 2x + y = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} 9x + 5y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{array} \right. \end{array}$$

Eliminamos y

$$\begin{array}{r} (1) - 5(2) \\ 9x + 5y = 0 \\ \underline{-10x - 5y = 5} \\ -x = 5 \end{array}$$

$$x = -5$$

Sustituyendo x en (1).

$$\begin{aligned} 9(-5) + 5y &= 0 \\ -45 + 5y &= 0 \\ 5y &= 45 \\ y &= 9 \end{aligned}$$

$\therefore x = -5 \wedge y = 9$ son las soluciones del sistema.

Resolver el Sistema:

$$\begin{cases} (1) & x + y = a + b \\ (2) & bx + ay = 2ab \end{cases}$$

SOL: $x = a; y = b$

Resolver el Sistema:

$$\begin{cases} (1) & ax + by = a^2 + b^2 \\ (2) & bx + ay = 2ab \end{cases}$$

Eliminamos x

$$\begin{aligned} &b(1) - a(2) \\ &abx + b^2y = a^2b + b^3 \\ &\underline{-abx - a^2y = -2a^2b} \\ &y(b^2 - a^2) = a^2b + b^3 - 2a^2b \\ &\quad = b^3 - a^2b \\ &y(b^2 - a^2) = b(b^2 - a^2) \\ &\quad y = b \end{aligned}$$

Sustituyendo $y = b$ en (2)

$$\begin{aligned} bx + ab &= 2ab \\ bx &= 2ab - ab \\ bx &= ab \\ x &= a \end{aligned}$$

$\therefore x = a \quad y = b$

Resolver el Sistema:

$$\begin{cases} (1) & \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{b}{a} \\ (2) & x - y = a \end{cases}$$

SOL: $x = a + b \quad \wedge \quad y = b$

Resolver el Sistema

$$\begin{cases} (1) & x + y = \frac{a^2 + b^2}{ab} \\ (2) & ax - by = 2b \end{cases}$$

Expresamos las ecuaciones en la forma general.

De (1) $abx + aby = a^2 + b^2$

(1) $abx + aby = a^2 + b^2$

(2) $ax - by = 2b$

Eliminando y

$$\begin{aligned} (1) & - a(2) \\ abx + aby &= a^2 + b^2 \\ a^2x - aby &= 2ab \\ \hline x(ab + a^2) &= a^2 + 2ab + b^2 \\ ax(a + b) &= (a + b)^2 \\ ax &= a + b \\ x &= \frac{a + b}{a} \end{aligned}$$

Este valor de x podemos sustituir en cualquier ecuación para hallar y, pero no vamos a hacerlo así, sino vamos a hallar y eliminando x.

$$\begin{aligned} (1) & - b(2) \\ abx + aby &= a^2 + b^2 \\ -abx + b^2y &= -2b^2 \\ \hline y(ab + b^2) &= a^2 - b^2 \\ by(a + b) &= (a + b)(a - b) \\ by &= a - b \\ y &= \frac{a - b}{b} \\ \therefore x &= \frac{a + b}{a} \quad \wedge \quad y = \frac{a - b}{a} \end{aligned}$$

Nota. - El proceso empleado en este ejercicio, es muchas veces, más sencillo que el de sustituir.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} (1) & \frac{x+a}{a-b} + \frac{y-a}{a+b} = \frac{x+b}{a+b} + \frac{2(y-b)}{a-b} \\ (2) & \frac{b}{a} - \frac{a+x}{b} = \frac{a}{b} - \frac{b+y}{a} \end{cases}$$

$$\text{SOL: } x = (2a^3 + 6a^2b - 5ab^2 - 9b^3)/(2b^2 - a^2 - 3ab)$$

$$y = (-3ab^2 + a^2b - 4b^3)/(-a^2 - 3ab + 2b^2)$$

OBSERVACIÓN: El método de reducción es el más expedito cuando los coeficientes de una misma incógnita son iguales en las dos ecuaciones, o cuando, con una sola operación, se les puede hacer iguales, en todo caso, este método ofrece la gran ventaja de no introducir denominadores en el cálculo.

Este método es el preferido tratándose de ecuaciones literales y cuando se trata de hallar por separado las incógnitas (por cuanto la sustitución ofrece complicaciones en el cálculo). En este método se podría efectuar únicamente adiciones, para ello bastaría multiplicar los miembros de cada ecuación por un factor positivo o negativo, elegido de tal suerte que una incógnita tenga coeficientes opuestos en ambas ecuaciones.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON 3 INCÓGNITAS

El sistema tiene la siguiente forma general:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se procede de la siguiente manera:

1. Se numeran las ecuaciones y se expresan en la forma general.
2. Se combinan dos de las ecuaciones dadas y se elimina una de las incógnitas (lo más sencillo es eliminarlo por suma y resta), con ello se obtiene una ecuación con dos incógnitas.
3. Se combina la tercera ecuación con cualquiera de las otras dos ecuaciones dadas y se elimina entre ellas la misma incógnita que se eliminó antes, obteniéndose otra ecuación con dos incógnitas.
4. Se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones con dos incógnitas que se han obtenido, hallando de este modo dos de las incógnitas.
5. Los valores de las incógnitas obtenidas se sustituyen en una de las ecuaciones dadas de tres incógnitas con lo cual se halla la tercera incógnita.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN. –

- 1.- Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (1) & x + y + z = 11 \\ (2) & 2x - y + z = 5 \\ (3) & 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$$

Combinamos (1) y (2), eliminando z , para lo cual multiplicamos la ecuación (1), por -1 y sumamos con (2): $-1(1) + (2)$

$$\begin{array}{r} -x - y - z = -11 \\ 2x - y + z = 5 \\ \hline x - 2y = -6 \end{array} \quad (4)$$

Combinamos la ecuación (3), con cualquiera de las otras ecuaciones. Lo combinamos con (1) y eliminamos la misma incógnita z , para lo cual multiplicamos (1) por -1 y sumamos con (3).

$$\begin{array}{r} -1(1) + (3) \\ -x - y - z = -11 \\ 3x + 2y + z = 24 \\ \hline 2x + y = 13 \end{array} \quad (5)$$

Tomamos las ecuaciones (4) y (5) formando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} (4) & x - 2y = -6 \\ (5) & 2x + y = 13 \end{cases}$$

Resolvemos por cualquiera de los métodos conocidos. Vamos a utilizar reducción:

$$\begin{array}{r} (4) + (5) \cdot 2 \\ x - 2y = -6 \\ 4x + 2y = 26 \\ \hline 5x = 20 \\ x = 4 \end{array}$$

Sustituimos x en (4) o en (5), x en (4) con lo cual:

$$\begin{array}{r} 4 - 2y = -6 \\ -2y = -10 \\ y = 5 \end{array}$$

Sustituimos $x=4$, $y=5$ en cualquiera de las tres ecuaciones dadas. Por ejemplo, en (1).

$$4 + 5 + z = 11$$

$$z = 2$$

Los tres valores: $x=4$, $y=5$ $\wedge$ $z=2$. Forman la solución del sistema propuesto.

2. Sea el sistema:

$$\begin{cases} (1) & 5x + y + 3z = 6 \\ (2) & 4x + 3y - z = 4 \\ (3) & x - 2y + 4z = 5 \end{cases}$$

(1) + (2) $\cdot 3$, eliminamos z .

4(2) + (3) eliminamos z

$$\begin{array}{r} 5x + y + 3z = 6 \\ 12x + 9y - 3z = 12 \\ \hline 17x + 10y = 18 \end{array} \quad (4)$$

$$\begin{array}{r} 16x + 12y - 4z = 16 \\ x - 2y + 4z = 5 \\ \hline 17x + 10y = 21 \end{array} \quad (5)$$

Con (4) y (5). Formamos un nuevo sistema:

$$\begin{array}{l} (4) \left\{ \begin{array}{l} 17x + 10y = 18 \\ 17x + 10y = 21 \end{array} \right. \\ (5) \end{array}$$

Sistema imposible de resolver. Por lo tanto, el sistema propuesto es imposible de resolver.

3. Resolver el sistema:

$$\begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} 6x - 4y + 2z = 15 \\ 4x + y + z = 8 \\ 2x - 5y + z = 7 \end{array} \right. \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (1) - 2(2) \text{ eliminamos } z. \\ 6x - 4y + 2z = 15 \\ -8x - 2y - 2z = -16 \\ \hline -2x - 6y = -1 \\ 2x + 6y = 1 \end{array} \quad (4)$$

$$\begin{array}{r} (2) - (3) \\ 4x + y + z = 0 \\ -2x + 5y - z = -7 \\ \hline 2x + 6y = 1 \end{array} \quad (5)$$

Con (4) y (5) formamos un nuevo sistema.

$$\begin{array}{l} (4) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 6y = 1 \\ 2x + 6y = 1 \end{array} \right. \\ (5) \end{array}$$

Obteniéndose un sistema indeterminado. Por lo tanto, el sistema propuesto, es un sistema indeterminado.

4. Resolver el sistema:

$$\begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2,4 \\ x + y - z = 1,8 \\ x - y + z = -1,6 \end{array} \right. \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

SOL: $x = 0,1 \quad y = 2 \quad z = 0,3$

5. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{3} - 2B - \frac{C}{5} = \frac{1}{3} \\ 2A + \frac{B}{3} - \frac{C}{2} = -\frac{2}{3} \\ \frac{A}{6} - \frac{B}{2} + \frac{C}{3} = \frac{25}{12} \end{array} \right. \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

En este sistema tenemos dos posibilidades de cálculo, operar con fracciones o resolver el sistema transformando las ecuaciones. (Mayor facilidad presentan los coeficientes enteros).

$$\begin{array}{lcl} (1) & 15 & \left\{ \begin{array}{l} 5A-30B-3C=5 \\ 12A+2B-3C=-4 \\ 2A-6B+4C=25 \end{array} \right. \\ (2) & 6 & \\ (3) & 12 & \end{array}$$

(1) - (2) eliminamos C

$$\begin{array}{rcl} 5A - 30B - 3C & = & 5 \\ - 12A - 2B + 3C & = & 4 \\ \hline -7A - 32B & = & 9 \end{array} \quad (4)$$

4(1) + 3(3)

$$\begin{array}{rcl} 20A - 120B - 12C & = & 20 \\ 6A - 18B + 12C & = & 75 \\ \hline 26A - 138B & = & 95 \end{array} \quad (5)$$

$$\begin{array}{lcl} (4) & \left\{ \begin{array}{l} -7A-32B=9 \\ 26A-138B=95 \end{array} \right. \\ (5) & \left\{ \begin{array}{l} -182A-832B=234 \\ 182A-966B=665 \end{array} \right. \\ 26(4) & \left\{ \begin{array}{l} -182A-832B=234 \\ 182A-966B=665 \end{array} \right. \\ 7(5) & \left\{ \begin{array}{l} -182A-832B=234 \\ 182A-966B=665 \end{array} \right. \\ \hline & & -1798B=899 \end{array}$$

$$B = -\frac{899}{1798}$$

$$B = -1/2$$

B en (4)

$$\begin{array}{l} -7A-32\left(-\frac{1}{2}\right)=9 \\ -7A+16=9 \\ -7A=9-16 \\ -7A=-7 \\ A=1 \end{array}$$

A y B en (1)

$$\begin{array}{l} 5 + 15 - 3C = 5 \\ -3C = -15 \\ C = 5 \end{array}$$

$\therefore A = 1, B = -1/2; C = 5$ forman la solución del sistema

6. Resolver el sistema:

$$\begin{array}{lcl} (1) & \left\{ \begin{array}{l} z-4+\frac{6x-19}{5} = -y \\ 10-\frac{x-2z}{8} = 2y-1 \\ 4z+3y = 3x-9 \end{array} \right. \\ (2) & \\ (3) & \end{array}$$

SOL: $x=4, y=5, z=-2$.

7. Resolver el sistema:

$$\begin{array}{lcl} (1) & 2x-5y=13 \\ (2) & 4y+z=-8 \\ (3) & x-y-z=-2 \end{array}$$

Para formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas debemos combinar (3) con (1) y (3) con (2) eliminando y .

$$\begin{array}{rcl} \text{Con } 4(3) + (2) & & \\ 4x - 4y - 4z = -8 & & \\ \underline{4y + z = -8} & & \\ 4x - 3z = -16 & (4) & \end{array}$$

$$(4) \quad 4x - 3z = -16$$

$$(5) \quad -3x + 5z = 23$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Con } -5(3) + (1) & & \\ -5x + 5y + 5z = 10 & & \\ \underline{2x - 5y = 13} & & \\ -3x + 5z = 23 & (5) & \end{array}$$

Con $5(4) + 3(5)$ eliminamos z .

$$\begin{array}{rcl} 20x - 15z = -80 & & \\ -9x + 15z = 69 & & \\ \hline 11x = -11 & & \\ x = -1 & & \end{array}$$

x en (4)

$$-4 - 3z = -16$$

$$-3z = -12 \quad z = 4$$

x, z en (3)

$$-1 - y - 4 = -2$$

$$-y = 3 \quad y = -3$$

$\therefore x = -1, y = -3, z = 4$ forman la solución del sistema.

ARTIFICIOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES. –

En algunos casos particulares conviene apartarse de los métodos explicados y seguir otros procedimientos que, sin estar sujetos a normas determinadas, conducen a una resolución más elegante y rápida del sistema, y a la reducción de sistemas de grado superior a otros equivalentes de primer grado.

Para ello se utilizan ciertos artificios de cálculo que consisten, ya en la elección conveniente de las incógnitas que han de despejarse, ya en las distintas combinaciones que entre sí puedan hacerse con las ecuaciones, o por otros medios que la práctica en el manejo de las ecuaciones surgiera al operador.

A continuación, veamos algunos ejemplos de dichas simplificaciones.

SISTEMAS CON ECUACIONES INCOMPLETAS.

EJERCICIO DE APLICACIÓN. -

1.- Resolver el siguiente sistema.

$$\begin{array}{l} (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 12 \\ x + z = 14 \\ y + z = 16 \end{array} \right. \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

PRIMERA ALTERNATIVA:

Sumando, las tres ecuaciones: (1)+(2)+(3)

$$\begin{array}{r} x + y = 12 \\ x + z = 14 \\ y + z = 16 \\ \hline 2x + 2y + 2z = 42 \end{array}$$

Simplificando resulta: $x + y + z = 21$ (4)

Si de la ecuación (4) restamos: (1), (2) y (3) tendremos: (4) – (1)

$$\begin{array}{r} x + y + z = 21 \\ -x - y = -12 \\ \hline z = 9 \end{array}$$

(4) – (2)

$$\begin{array}{r} x + y + z = 21 \\ -x - z = -14 \\ \hline y = 7 \end{array}$$

(4) – (3)

$$\begin{array}{r} x + y + z = 21 \\ -y - z = -16 \\ \hline x = 5 \end{array}$$

Por lo que: $x = 5$, $y = 7$, $z = 9$. Forman la solución del sistema propuesto

SEGUNDA ALTERNATIVA:

Entre (1) y (2) eliminamos x : (1) – (2)

$$\begin{array}{r} x + y = 12 \\ -x - z = -14 \\ \hline y - z = -2 \end{array}$$

Con (4) y (2) eliminar z : (4) + (3)

$$\begin{array}{r} y - z = -2 \\ y + z = 16 \\ \hline 2y = 14 \\ y = 7 \end{array}$$

Con y en (3)

$$\begin{array}{r} 7 + z = 16 \\ z = 9 \end{array}$$

Con y en (1)
 $x + 7 = 12$
 $x = 5$

Por lo que: $x = 5, y = 7, z = 9$. Forman la solución del sistema propuesto.

2.- Sea el sistema

$$\begin{cases} 1) & 3x - 2y + z = 7 \\ 2) & x + 2z = 8 \\ 3) & z - y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y + z = 7 \\ x + 2z = 8 \\ -y + z = 2 \end{cases}$$

Entre (1) y 2 eliminamos x ; (1) -3 (2)

$$\begin{array}{r} 3x - 2y + z = 7 \\ -3x \quad -6z = -24 \\ \hline -2y - 5z = -17 \\ 2y + 5z = 17 \quad (4) \end{array}$$

Con (4) $\wedge$ (3) eliminamos y : $-(4)+2(3)$

$$\begin{array}{r} 2y + 5z = 17 \\ -2y + 2z = 4 \\ \hline 7z = 21 \\ z = 3 \end{array}$$

Con z en (3)

$$\begin{array}{r} -y + 3 = 2 \\ -y = -1 \\ y = 1 \end{array}$$

Con z en (2)

$$\begin{array}{r} x + 6 = 8 \\ x = 2 \end{array}$$

Por lo que: $x = 2, y = 1, z = 3$. Forman la solución del sistema propuesto.

3.- Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{l} (1) \quad x - 8y + 2z = -8 \\ (2) \quad 2y + 3z = -1 \\ (3) \quad 2x + 4y - z = 9 \end{array}$$

SOL: $x = 2, y = 1, z = -1$.

4.- Resolver el sistema.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{2}{z} = -6 & (1) \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = 3 & (2) \\ \frac{6}{x} - \frac{5}{y} - \frac{6}{z} = 31 & (3) \end{cases}$$

Haciendo:

$$\frac{1}{x} = p \quad \frac{1}{y} = q \quad \frac{1}{z} = r$$

$$\begin{cases} 1) & p + 4q + 2r = -5 \\ 2) & 3p + 2q + 4r = 3 \\ 3) & 6p - 5q - 5r = 31 \end{cases}$$

Con (1)3-(2) eliminamos **p**:

$$\begin{array}{r} 3p + 12q + 6r = -18 \\ -3p - 2q - 4r = -3 \\ \hline 10q + 2r = -21 \end{array} \quad (4)$$

Con (1)6-(3) eliminamos **p**:

$$\begin{array}{r} 6p + 24q + 12r = -36 \\ -6p + 5q + 6r = -31 \\ \hline 29q + 18r = -67 \end{array} \quad (5)$$

Con (4) $\wedge$ (5) formamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} (4) & 10q + 2r = -21 \\ (5) & 29q + 18r = -67 \end{cases}$$

Con (4)9 -(5) eliminamos **r**:

$$\begin{array}{r} 90q + 18r = -189 \\ -29q - 18r = 67 \\ \hline 61q = -122 \\ q = -2 \end{array}$$

q en (4)

$$\begin{array}{r} -20 + 2r = -21 \\ 2r = -1 \\ r = -1/2 \end{array}$$

q $\wedge$ r en 1

$$\begin{array}{r} p + 4(-2) + 2(-1/2) = -6 \\ p - 8 - 1 = -6 \\ p = -6 + 9 \\ p = 3 \end{array}$$

Como $p = \frac{1}{x}$ $q = \frac{1}{y}$ $r = \frac{1}{z}$.

$$\begin{array}{r} 3 = 1/x \quad -2 = 1/y \quad -1/2 = 1/z \\ x = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{1}{-2}, \quad z = 2 \end{array}$$

Otra alternativa de cálculo

$$\begin{cases} 1) & \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{2}{z} = -6 \\ 2) & \frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = 3 \\ 3) & \frac{6}{x} - \frac{5}{y} - \frac{6}{z} = 31 \end{cases}$$

$$(2)2-(1) \quad y \quad (2)5 + 2(3)$$

$$\begin{aligned} \frac{6}{x} + \frac{4}{y} + \frac{8}{z} &= 6 \\ -\frac{1}{x} - \frac{4}{y} - \frac{2}{z} &= 6 \\ \hline \frac{5}{x} + \frac{6}{z} &= 77 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{15}{x} + \frac{10}{y} + \frac{20}{z} &= 15 \\ \frac{12}{x} - \frac{10}{y} - \frac{12}{z} &= 62 \\ \hline 27x + \frac{8}{z} &= 77 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{5}{x} + \frac{6}{z} &= 12 \\ \frac{27}{x} + \frac{8}{z} &= 77 \end{aligned} \right. \\ (5) \quad & 4(4) - (5)3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{20}{x} + \frac{24}{z} &= 48 \\ -\frac{81}{x} - \frac{24}{z} &= -231 \\ \hline -\frac{61}{x} &= -183 \\ -\frac{61}{x} &= -183 \end{aligned}$$

$$x = \frac{61}{183} = \frac{1}{3}$$

x en (4)

$$\frac{5}{\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{6}{z} = 12$$

$$15 + \frac{6}{z} = 12$$

$$\frac{6}{z} = -3$$

$$6 = -3z$$

$$-\frac{6}{3} = z$$

$$z = -2$$

x ∧ z en (1)

$$3 + \frac{4}{y} - 1 = -6$$

$$\frac{4}{y} = -6 - 2$$

$$-8y = 4$$

$$y = -1/2$$

5.- Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{4}{x} + \frac{5}{y} &= \frac{1}{4} \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{z} &= \frac{5}{12} \\ \frac{5}{y} + \frac{3}{z} &= \frac{1}{3} \end{aligned} \right. \\ 2) \quad & \\ 3) \quad & \end{aligned}$$

SOL: x = 24, y = 80, z = 12.

6.- Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 1) \quad \frac{2}{2x-y} + \frac{1}{y+2x} = \frac{15}{7} \\ 2) \quad \frac{6}{y-2x} - \frac{5}{4x+2y} = -\frac{89}{14} \end{cases}$$

Ordenando los denominadores

$$\begin{cases} 1) \quad \frac{2}{2x-y} + \frac{1}{2x+y} = \frac{15}{7} \\ 2) \quad -\frac{6}{2x-y} - \frac{5}{2(2x+y)} = -\frac{89}{14} \end{cases}$$

Haciendo

$$\begin{aligned} p &= 2x - y \\ q &= 2x + y \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1) \quad \frac{2}{p} + \frac{1}{q} = \frac{15}{7} \\ 2) \quad -\frac{6}{p} - \frac{5}{2q} = -\frac{89}{14} \end{cases}$$

Resolviendo

(1)3+ (2)

$$\begin{aligned} \frac{6}{p} + \frac{3}{q} &= \frac{45}{7} \\ -\frac{6}{p} - \frac{5}{2q} &= -\frac{89}{14} \\ \hline \frac{3}{q} - \frac{5}{2q} &= \frac{1}{14} \\ \frac{6-5}{2q} &= \frac{1}{14} \end{aligned}$$

$$14 = 2q \qquad q = 7$$

q en 1

$$\frac{2}{p} + \frac{1}{7} = \frac{15}{7}$$

$$\frac{2}{p} = \frac{14}{7} \qquad \frac{2}{p} = 2 \qquad p = 1$$

Por lo que:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (3) \\ 2x + y = 7 & (4) \end{cases}$$

Resolviendo (3) y (4)

$$2x - y = 1$$

$$2x + y = 7$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

x en 3

$$4 - y = 1$$

$$-y = -3$$

$$y = 3$$

Por lo que

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Forman la solución del sistema propuesto

7.- Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 1) \quad \frac{1}{1-x+y} - \frac{1}{x+y-1} = \frac{2}{3} \\ 2) \quad \frac{1}{\frac{1}{1-x-1} - \frac{1}{x+y-1}} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

SOL: x=2; y=2

8.- Resolver:

$$\begin{cases} (1) \quad \frac{1}{a}(a+1)(x-bc) - \frac{1}{b}(b+1)(y+ac) = a-b \\ (2) \quad (a+b)(x-bc) - (a-b)(y+ac) = a^2 + b^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} A = x-bc \\ B = y+ac \end{matrix}$$

Operando:

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{a}A - \frac{b+1}{b}B &= a-b & (1) \cdot (a+b) \\ (a+b)A - (a-b)B &= a^2 + b^2 & (2) \cdot -\frac{(a+1)}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(a+1)(a+b)A}{a} - \frac{(b+1)(a+b)B}{b} &= a^2 - b^2 \\ -\frac{(a+b)(a+1)A}{a} + \frac{(a-b)(a+1)B}{a} &= -\frac{(a^2 + b^2)(a+1)}{a} \\ B \left[\frac{(a-b)(a+1)}{a} - \frac{(a+b)(b+1)}{b} \right] &= a^2 - b^2 - \frac{(a^2 + b^2)(a+1)}{a} \end{aligned}$$

$$B = \frac{\frac{a^3 - ab^2 - (a^3 + a^2 + ab^2 + b^2)}{a}}{\frac{b(a^2 + a - ab - b) - a(ab + a + b^2 + b)}{ab}} = \frac{ab(a^3 - ab^2 - a^3 - a^2 - ab^2 - b^2)}{a(a^2b + ab - ab^2 - b^2 - a^2b - a^2 - ab^2 - ab)}$$

$$B = \frac{b(-a^2 - 2ab^2 - b^2)}{-a^2 - 2ab^2 - b^2} = b$$

Entonces:

$$y + ac = b$$

$$y = b - ac$$

y en (2)

$$(a + b)(x - bc) - (a - b)(b - ac + ac) = a^2 + b^2$$

$$-(ab - b^2) = a^2 + b^2$$

$$-ab + b^2 = a^2 + b^2$$

$$= a^2 + ab$$

$$(a + b)(x - bc) = a(a + b)$$

$$x - bc = a$$

$$x = a + bc$$

EJERCICIOS: Sistema de ecuaciones

$$1) \quad 3x - \frac{4}{5}(y - 3) = \frac{22}{5} \qquad 2y + \frac{2}{3}(x - 4) = \frac{26}{3} \qquad x = 2 \quad y = 5$$

$$2) \quad 3x + \frac{x + 2y}{6} - \frac{2x}{3} = 12\frac{1}{3} \qquad 2y - \frac{3x - 4y}{5} + \frac{5x}{6} = 62\frac{1}{15} \qquad x = 2 \quad y = 22$$

$$3) \quad \frac{2}{3}(2x - y) + \frac{1}{4}(x + \frac{2}{3}) = \frac{31}{18}x - \frac{2}{5}(2y - \frac{10}{3}) = \frac{1}{6}(2x - y + 1) \qquad x = 6 \quad y = 15$$

$$4) \quad 12(3x - 5y) = 2,5(2x + 6y) - 56 \qquad \frac{1}{5}(2x + 3y) = \frac{1}{4}(6x - y) - 9,3 \qquad x = 10 \quad y = 2$$

$$5) \quad \frac{2x - 3y}{5} + \frac{4x + 2y}{3} - \frac{x}{6} = \frac{193}{150} \qquad \frac{2(x - y)}{3} - \frac{y}{4} + \frac{3x - 2y}{6} + \frac{x}{12} = \frac{3}{8} \qquad x = 0,8 \quad y = 0,5$$

$$6) \quad \frac{3(2x - 5y)}{5x - 2y} = -24 \qquad \frac{4(5x + 2y)}{3(\frac{1}{3} + 5y)} = 1 \qquad x = \frac{1}{6} \quad y = \frac{1}{3}$$

$$7) \quad \frac{6x - \frac{3}{4}(x + y)}{5} - \frac{37}{200} = 0 \qquad \frac{3y + \frac{3}{8}(x - y)}{6} - \frac{41}{480} = 0 \qquad x = \frac{1}{5} \quad y = \frac{1}{6}$$

$$8) \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{x}{4} - \frac{2y}{5} + \frac{175}{12}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{x}{2} + \frac{1.5y}{3}} \qquad \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2x}{3} - \frac{y}{4} - \frac{x}{5} + \frac{y}{6} + \frac{16}{15}} = 2 \qquad x = 3 \quad y = 5$$

$$9) \quad \frac{(0,12 + 0,2y)0,6}{(0,5x + 0,8y)0,4} = \frac{30}{47} \qquad \frac{(0,9x - 0,6y)0,5}{(0,3x + 0,6y)0,8} = \frac{5}{88} \qquad x = 0,3 \quad y = 0,4$$

$$10) \frac{3}{4} [(2+x)3 - (5+y)2] = x + \frac{y}{2}$$

$$\frac{2}{5} [(x-3)4 + (y-2)6] = x + 2y$$

$$x = 12 \quad y = 6$$

$$11) \frac{4}{5} \left(x - \frac{y}{3} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{x}{4} + 2y \right) = 14 \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{6} \left(3x + \frac{3y}{4} \right) - \frac{1}{4} \left(5y - \frac{2x}{3} \right) = 11$$

$$x = 6 \quad y = 8$$

$$12) \frac{1}{y - \frac{y}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{x - \frac{x}{1 + \frac{1}{y}}} = 4$$

$$x = \frac{1}{2} \quad y = 1$$

$$13) 0, \overline{25} x + 0, \overline{3} y = 280$$

$$3,1 \overline{2} x + 0,0 \overline{5} y = 30,96$$

$$x = 990 \quad y = 90$$

$$14) \frac{2x + \frac{y}{5} - 1}{3x - 3} + 0,72 = 0$$

$$\frac{2y - \frac{x}{5} + 1}{5y - 3} + 0,625 = 0$$

$$x = \frac{3}{4} \quad y = \frac{1}{5}$$

$$15) \frac{\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{x}{5} + \frac{y}{6} + \frac{1}{7}} = 1$$

$$\frac{2x + 3y + 4}{5x + 6y + 7} = 1$$

$$x = \frac{25}{56} \quad y = -\frac{81}{56}$$

$$16) 2x + \left(\frac{y - \frac{3}{4}}{5} \right)^2 = \left(\frac{y - \frac{1}{4}}{5} \right)^2 - \frac{3}{50}$$

$$\left(\frac{2x + \frac{3}{2}}{6} \right)^2 - y = \left(\frac{x + \frac{3}{2}}{3} \right)^2 - \frac{35}{16}$$

$$x = 0 \quad y = 2$$

$$18) \frac{10}{x-2} + \frac{3}{y-5} = 3$$

$$\frac{9}{y-5} - \frac{4}{x-2} = 2,2$$

$$x = 7 \quad y = 8$$

$$19) \frac{x-2[(x+3)2-5y]}{y-5[(y-2)3-4x]} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{4-3[(x-y)2-2x]}{1+2[(x+y)3-4y]} = \frac{2}{3}$$

$$x = 10 \quad y = 5$$

$$20) \left[2\frac{1}{8} - \left(\frac{7}{8} + \frac{5}{12} \right) \right] x + \left(20\frac{5}{8} / 3\frac{7}{16} \right) y = 35$$

$$\frac{\left(\frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2} \text{ de } 5}{9\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}} x - \frac{3}{5} \left(4 + \frac{2}{3} \right) y = -8$$

$$x = 6 \quad y = 5$$

$$21) \frac{x}{4a} - \frac{y}{9b} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{x}{6a} + \frac{y}{5b} = \frac{14}{15}$$

$$x = 2a \quad y = 3b$$

$$22) \frac{x}{ab} - \frac{y}{b^2} = 1 - a^2$$

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = a + ab^2$$

$$x = ab \quad y = a^2 b^2$$

$$23) \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{3a} + \frac{y}{6b} = \frac{2}{3}$$

$$x = 3a \quad y = -2b$$

$$24) (a-c)x + by = ab$$

$$(b+c)x + (c-b)y = b^2 + c^2$$

$$x = b \quad y = c$$

$$25) (a+b)x + (a-b)y = a+b$$

$$(a-b)x - (a+b)y = a-b$$

$$x = 1 \quad y = 0$$

$$26) \frac{x-2a}{x-3a} + \frac{y-4b}{y+3b} = 2$$

$$\frac{x+2a}{x+a} = \frac{y+5b}{y+3b}$$

$$x = a \quad y = b$$

$$27) \frac{ax+b}{a} - 2a + \frac{by-a}{b} - b = \frac{b^2-a^2}{ab}$$

$$\frac{x+ay}{b} + a - \frac{ax-y}{a} = \frac{2a^2+b^2}{ab}$$

$$x = 2a \quad y = b$$

$$28) a(bx+cy) - a^2 - b(ax+cy) = c(y-ax) - \frac{acx}{b} = -ab$$

$$x = \frac{b}{c} \quad y = \frac{a}{c}$$

$$29) (x-a+b)c - (y-b-a)d = ac - bd$$

$$(a-b-x)a + (a+b-y)b = -(a^2+b^2)$$

$$x = 2a - b \quad y = a + 2b$$

$$30) \frac{x}{b+c} + \frac{y}{a+c} = 2$$

$$\frac{ax-by}{(a-b)c} = 1$$

$$x = b + c \quad y = a + c$$

$$31) \frac{x+y}{a} - 4 = \frac{y-x}{b}$$

$$\frac{x}{a+b} + \frac{y-2a+2b}{a-b} = 0$$

$$x = a+b \quad y = a-b$$

$$32) a^2(x-b) - b^2(y-a) + ab(y-x) = (a-b)(a+b-ab)$$

$$(a+b)(x+y) - 2(a+b) = \frac{(a^2-b^2)(a-b)}{ab}$$

$$x = \frac{b}{a} \quad y = \frac{a}{b}$$

$$33) (1+r+\frac{1}{r})x + (1-r-\frac{1}{r})y = 1$$

$$(1+r-\frac{1}{r})x + (1-r+\frac{1}{r})y = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2}$$

$$34) (a+\frac{ab}{a-b})x + (b+\frac{ab}{a-b})y = 1$$

$$(a-\frac{ab}{a+b})x + (b-\frac{ab}{a+b})y = 1$$

$$x = \frac{1}{a} \quad y = \frac{1}{b}$$

$$35) (a+b)(x+y) + (c+d)(x-y) = 1$$

$$(a-b)(x+y) - (c-b)(x-y) = 1$$

$$x = \frac{b-c}{2(bd-ac)} \quad y = \frac{b+c}{2(ac-bc)}$$

$$36) \frac{m}{x-a} + \frac{n}{y-b} = \frac{m-n}{b-a}$$

$$\frac{r}{x-a} - \frac{s}{y-b} = \frac{r+s}{b-a}$$

$$x = b \quad y = a$$

$$37) \frac{x+b-c}{y+a} + \frac{a}{b+c} = \frac{2(a^2+b^2-c^2)}{(b+c)y + (b+c)a}$$

$$\frac{a^2y}{(b-c)x} = \frac{(b+c)^2}{a}$$

$$x = \frac{a^2}{b+c} \quad y = \frac{b^2-c^2}{a}$$

$$38) \frac{ax}{a+b} - \frac{by}{a-b} + \frac{b^2}{a-b} = \frac{a^2}{2(a+b)}$$

$$\frac{bx}{a-b} + \frac{ay}{a+b} = \frac{ab(3a-b)}{2(a^2-b^2)}$$

$$x = \frac{a}{2} \quad y = b$$

$$39) \frac{(a+1)(x-bc)}{a} - \frac{(b+1)(y+ac)}{b} = a-b$$

$$(a+b)(x-bc) - (a-b)(y+ac) = a^2 + b^2$$

$$x = a+bc \quad y = b-ac$$

$$40) \frac{x}{ac} - \frac{y}{b} + \frac{x+y}{abc} + \frac{x}{bc} - \frac{y}{a} = \frac{1+c}{a}$$

$$\frac{ax}{bc} + \frac{by}{a} - \frac{2(x+y)}{1+c} = (a-b)^2$$

$$x = abc \quad y = ab$$

$$41) \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \sqrt{xy}$$

$$x = \frac{1}{16} \quad y = \frac{1}{9}$$

$$42) 4\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 6$$

$$6\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 46$$

$$x = 0,25 \quad y = 0,64$$

$$43) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}y = 7$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}y = 6$$

$$x = \sqrt{6} \quad y = \sqrt{30}$$

$$44) \sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 5$$

$$\sqrt{12,5x} - \sqrt{12y} = -1$$

$$x = 2 \quad y = 3$$

$$45) \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 8$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$$

$$x = 36 \quad y = 4 \quad x=4 \quad y=36$$

$$46) \frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{y}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{4}{\sqrt{y}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$$

$$x = 4 \quad y = 9$$

$$47) \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$$

$$\frac{4}{y} + \frac{3}{x} = 27$$

$$x = \frac{1}{5} \quad y = \frac{1}{3}$$

$$48) 3x^{-1} + 10y^{-1} = 6$$

$$11y^{-1} - 4,5x^{-1} = 4$$

$$x = 3 \quad y = 2$$

$$49) a(1 + \frac{1}{x}) + b(1 - \frac{1}{y}) = a + b$$

$$a(1 - \frac{1}{x}) - b(1 + \frac{1}{y}) = a - b - 2ab$$

$$x = \frac{1}{b} \quad y = \frac{1}{a}$$

$$50) \sqrt{2x + 3\sqrt{y}} = 4$$

$$\sqrt{8x - 2\sqrt{y}} = 6$$

$$x = 5 \quad y = 4$$

$$51) \frac{\sqrt{x - 2y + n}}{\sqrt{x + 2y + n}} = \frac{m - n}{m + n} = \frac{x - y}{x + y}$$

$$x = \frac{m^2}{n} \quad y = m$$

$$52) \sqrt{a + \sqrt{2x + 1}} = \sqrt{a + 2\sqrt{x - y}}$$

$$\sqrt{x + \sqrt{y - 2}} = \sqrt{x + \sqrt{x + 3y}}$$

$$x = -\frac{3}{4} \quad y = -\frac{5}{8}$$

$$53) \sqrt{x + y + 5} - \sqrt{20x + 20y} = 0$$

$$\sqrt{x + 3\sqrt{\frac{2x}{3}} - 1} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$$

$$x = 4 \quad y = 1$$

$$54) \sqrt{x + y - 2\sqrt{xy}} = \sqrt{y}$$

$$\sqrt{a^2x + b^2y + 2ab\sqrt{xy}} = 2a + b$$

$$x = 4 \quad y = 1$$

$$55) 2 - x\sqrt{5 + \sqrt{24}} + y\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} + x\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = y\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$

$$x = \sqrt{2} \quad y = \sqrt{3}$$

56) $x + y + z = 2,4$	$x + y - z = 1,8$	$x - y + z = - 1,6$	$x = 0,1$	$y = 2$	$z = 0,3$
57) $2x - 3y = 5$	$5x + z = 20$	$x + 6y - 4z = 0$	$x = 4$	$y = 1$	$z = 0$
58. $0,1x + 0,2y + 0,3z = 0,98$	$2,2x - 2,2y + 2,2z = 3,52$	$1,1x + 1,1y - 1,1z = 1,54$	$x = 1,5$	$y = 1,6$	$z = 1,7$
59. $\frac{x}{3} + \frac{2y}{5} - \frac{z}{6} = 3$	$x + y + z = 10,9$	$\frac{2x}{3} - \frac{3y}{8} + \frac{5z}{z} = 6,4$	$x = 5,1$	$y = 4$	$z = 1,8$
60. $\frac{x}{20} = \frac{y}{5} = \frac{z}{15}$	$2x - y + 3z = 16$		$x = 4$	$y = 1$	$z = 3$
61. $\frac{3x+3}{2} + \frac{y+3}{3} - \frac{z+4}{2} = 11$	$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{4} = 4$	$\frac{x-2}{z} + \frac{y-3}{3} + \frac{z-4}{4}$	$x = 9$	$y = 6$	$z = 10$
62. $\frac{x+y}{20} = \frac{z-y}{-\frac{4}{3}} = \frac{x-z}{8} = 3/4$			$x = 10$	$y = 5$	$z = 4$
63. $\frac{8x-2y}{10+2z} - 1 = 0$	$\frac{2y+3z}{4+5x} - 1 = 0$	$\frac{11x+6y}{5+8z} - 1 = 0$	$x = 3$	$y = 2$	$z = 5$
64. $\frac{xy}{7x+2y} = \frac{5}{6}$	$\frac{xz}{3x-5z} = 4$	$\frac{yz}{y+7z} = \frac{4}{5}$	$x = 10$	$y = 7$	$z = 4$

65. $ax = by = dz$

$ax + by - cz = d$

$x = d^2 [a(2d - c)]^{-1}$

$y = d^2 [b(2d - c)]^{-1}$

$z = d[2d - c]^{-1}$

66. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$

$ax + by - \frac{z}{c} = a^2 + b^2 - 1$

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + z = c$

$x = a$

$y = b$

$z = c$

67. $\frac{bx + ay}{a(b - \frac{a}{2})} = 1$

$\frac{x + 2z}{2b - 2y} = 1$

$\frac{ax - \frac{2y}{b}}{a(a + \frac{1}{b})} = 1$

$x = a$

$y = -\frac{a}{2}$

$z = b$

68. $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 9$

$\frac{1}{2x} + \frac{1}{2z} = 1\frac{2}{3}$

$\frac{2}{y} - \frac{5}{z} = 2\frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{3}$

$y = \frac{1}{2}$

$z = 3$

69. $x^{-1} + y^{-1} = \frac{13}{40}$

$x^{-1} + z^{-1} = \frac{11}{30}$

$y^{-1} + z^{-1} = \frac{7}{24}$

$x = 5$

$y = 8$

$z = 6$

70. $x\sqrt{8} + y\sqrt{12} = 10$

$2y\sqrt{12} - z\sqrt{8} = 4$

$4x\sqrt{2} - 3z\sqrt{2} = -4$

$x = \sqrt{2}$

$y = \sqrt{3}$

$z = 2\sqrt{2}$

71. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 11$

$2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} + 4\sqrt{z} = 6$

$5\sqrt{x} - 4\sqrt{y} - 4\sqrt{z} = 1$

$x = 25$

$y = 16$

$z = 4$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON n INCÓGNITAS. –

El sistema tiene la siguiente forma general:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \dots + d_1v &= k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots + d_2v &= k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + \dots + d_3v &= k_3 \\ &\vdots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \dots + d_nv &= k_n \end{aligned} \quad (\text{Reyes, S. , 2019})$$

Para resolver un sistema de n ecuaciones de 1^{ER} grado con n incógnitas se procede así:

1. Se numeran y se expresan en la forma general.
2. Se elimina una misma incógnita, entre una de las ecuaciones y las $(n-1)$ ecuaciones restantes.
3. Las $(n-1)$ ecuaciones con $(n-1)$ incógnitas que resultan forman con una de las ecuaciones propuestas, un sistema equivalente al primitivo.
4. En el sistema de $(n-1)$ ecuaciones con $(n-1)$ incógnitas, se elimina una misma incógnita, entre una de ellas y los demás restantes, obteniéndose $(n-2)$ ecuaciones con $(n-2)$ incógnitas, que con una de las $(n-1)$ y una de las n , constituyen otro sistema equivalente al propuesto.
5. Continúese de la misma manera hasta llegar a un sistema con n ecuaciones, que tienen respectivamente, $n, n-1, n-2, n-3, \dots, 3, 2, 1$ incógnitas.
6. Se resuelve la ecuación que resulta con una incógnita y el valor de esta se sustituye en la ecuación con dos incógnitas, lo cual dará el valor de una 2^{da} incógnita; luego por sustituciones sucesivas en sentido regresivo, llegaremos a obtener el valor de todas las incógnitas y la solución del sistema propuesto. (Martínez, A., 2010)

EJERCICIO. -

1) Resolver el sistema:

- (1). $x + y + z + u = 10$
- (2). $2x - y + 3z - 4u = 9$
- (3). $3x + 2y - z + 5u = 13$
- (4). $x - 3y + 2z - 4u = -3$

Combinamos una ecuación con las tres restantes, para de esta manera formar un sistema de tres ecuaciones.

Tomamos (1) y lo combinamos con las restantes eliminando x

De (1) y (2) eliminamos x , para lo cual: (1) $2 -$ (2)

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2z + 2u &= 20 \\ - 2x + y - 3z + 4u &= -9 \end{aligned}$$

$$3y - z + 6u = 11 \quad (5)$$

De (1) y (3), eliminamos x , por lo que (1) $3 -$ (2)

$$\begin{aligned} 3x + 3y + 3z + 3u &= 30 \\ - 3x - 2y + z - 5u &= -13 \end{aligned}$$

$$y + 4z - 2u = 17 \quad (6)$$

De (1) y (4), eliminamos x , por lo que (1) – (4)

$$\begin{array}{r} x + y + z + u = 10 \\ - x + 3y - 2z + 4u = 3 \\ \hline 4y - z + 5u = 13 \quad (7) \end{array}$$

Reuniendo (5), (6) y (7) tenemos un sistema de tres ecuaciones.

Para resolver el sistema de tres ecuaciones, tomamos una ecuación y la combinamos con las dos restantes, para formar un sistema de dos ecuaciones.

$$\begin{array}{l} (5). \quad 3y - z + 6u = 11 \\ (6). \quad y + 4z - 2u = 17 \\ (7). \quad 4y - z + 5u = 13 \end{array}$$

Tenemos (6) y lo combinamos con las dos restantes, eliminamos y .

De (6) y (5), eliminamos y , por lo que (5) – 3(6)

$$\begin{array}{r} 3y - z + 6u = 11 \\ - 3y - 12z + 6u = - 51 \\ \hline - 13z + 12u = - 40 \quad (8) \end{array}$$

De (6) y (7), eliminamos y por lo que (6) 4 – (7)

$$\begin{array}{r} 4y + 16z - 8u = 68 \\ - 4y + z - 5u = - 13 \\ \hline 17z - 13u = 55 \quad (9) \end{array}$$

Reuniendo (8) y (9) tenemos un sistema de 2 ecuaciones.

Para resolver este sistema eliminamos una de las incógnitas, y encontramos su valor.

$$\begin{array}{l} (8). \quad - 13z + 12u = - 40 \\ (9). \quad 17z - 13u = 55 \\ (10). \end{array}$$

Vamos a eliminar z , por lo que (8)17+ (9)13

$$\begin{array}{r} - 221z + 204u = - 680 \\ 211z - 169u = 715 \\ \hline 35u = 35 \\ u = 1 \end{array}$$

Con $u = 1$ sustituimos en (8) o en (9). sustituimos en (8).

$$\begin{array}{r} - 13z + 12(1) = - 40 \\ - 13z = - 52 \\ z = 4 \end{array}$$

Con $u = 1$, $z = 4$ sustituimos en (5), (6) o (7). Sustituimos en 6

$$\begin{array}{r} y + 4(4) - 2(1) = 17 \\ y = 17 - 16 + 2 \end{array}$$

$$y = 3$$

Con $u = 1$, $z = 4$, $y = 3$ sustituimos en (1), (2), (3) o (4), sustituyendo en (1).

$$\begin{aligned} X+3 + 4+1 &= 10 \\ x &= 10 - 8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

∴ $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$, $u = 1$. Forman la solución del sistema propuesto.

2) Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} (1). \quad & 2x + 5z = 24 \\ (2). \quad & 4v - 3y = 11 \\ (3). \quad & 3x + 7v = 41 \\ (4). \quad & 4x - 3y + 3v = 14 \end{aligned}$$

Para resolver este tipo de ecuaciones, tomamos la ecuación que presente el mayor número de incógnitas y procedemos a eliminar la incógnita que más se repite.

$$\begin{array}{rcl} \text{Con (4) y (3), eliminamos } v: & (4)7 - (3)3 & \\ 28x - 21y + 21v & = 98 & \\ - 9x & - 21v = - 123 & \\ \hline 19x - 21y & = -25 & (5) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Con (4) y (2), eliminamos } v: & (4)4 - (2)3 & \\ 16x - 12y + 12v & = 56 & \\ 9y - 12v & = -33 & \\ \hline 16x - 3y & = 23 & (6) \end{array}$$

Con (5) y (6) formamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{aligned} (5). \quad & 19x - 21y = - 25 \\ (6). \quad & 16x - 3y = 23 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Con (5) - (6)7 eliminamos } y. & & \\ 19x - 21y & = - 25 & \\ -102x + 21y & = - 161 & \\ \hline \end{array}$$

$$- 83x = - 186$$

$$x = 2$$

Con $x = 2$, en (6)	Con $x = 2$, en (1)	Con $x = 2$, en (3)
$32 - 3y = 23$	$4 + 5z = 24$	$6 + 7v = 41$
$- 3y = -9$	$5z = 20$	$7v = 35$
$y = 3$	$z = 4$	$v = 5$

∴ $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$, $v = 5$ son la solución del sistema propuesto.

3) Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{lcl} (1). & 2x - 4y + z + 3v & = 23 \\ (2). & 2y - 3z & = -11 \\ (3). & y + 2z & = 5 \\ (4). & 5x + 3y - z + v & = 8 \end{array}$$

SOL: $x = 2, y = -1, z = 3, v = 4$.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO O CUADRÁTICAS. -

Es aquella en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es 2, y que tiene la siguiente forma general: $ax^2 + bx + c = 0$

O que son reducibles a esta forma por transformaciones algebraicas. En esta ecuación, x representa la incógnita y los coeficientes a, b, c son constantes. Se supone que $a \neq 0$, pues de lo contrario, la ecuación se reduciría a otra de primer grado (si $b \neq 0$).

Una ecuación cuadrática se obtiene igualando a cero un trinomio (completo o incompleto) de segundo grado.

Por ejemplo, son ecuaciones de segundo grado:

$$\begin{array}{l} a.- 6x^2 - 3x + 5 = 0 \\ b.- 4x^2 - 0,2 = 0 \\ c.- x^2 + 13x = 0 \\ d.- 2x^2 = 0 \\ e.- x(x + 1)(x + 3) = x^3 + 2x - 5 \\ \quad x^3 + 4x^2 + 3x = x^3 + 2x - 5 \end{array}$$

También es de segundo grado ya que por transformaciones algebraicas se obtiene

$$4x^2 + x + 5 = 0$$

Las ecuaciones de segundo grado pueden ser completas e incompletas.

Ecuación de segundo grado completa es la que tiene la forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad 2x^2 + 8x + 15 = 0$$

Las ecuaciones de segundo grado incompletas tienen la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} ax^2 + bx = 0 & (c = 0) \\ ax^2 + c = 0 & (b = 0) \\ ax^2 = 0 & (b = c = 0) \end{array}$$

Toda ecuación de segundo grado tiene dos raíces o soluciones

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

A.- ECUACIONES INCOMPLETAS DE LA FORMA $ax^2 + c = 0$

Resolviendo la ecuación $ax^2 + c = 0$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Por lo tanto, la ecuación $ax^2 + c = 0$ admite dos soluciones o raíces

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad (\text{Reyes, S. , 2019})$$

EJERCICIO. –

1.- Resolver la ecuación $3x^2 - 48 = 0$

Si se traslada el término constante al segundo miembro se tiene:

$$3x^2 = 48$$

Despejando x^2 :

$$x^2 = \frac{48}{3} = 16$$

Extrayendo la raíz cuadrada:

$$x = \pm \sqrt{16}$$

Entonces la ecuación propuesta admite dos soluciones o raíces,

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 3(\pm 4)^2 - 48 &= 0 \\ 3(16) - 48 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

2.- Resolver la ecuación $9x^2 - 1 = 0$.

SOL: $x_1 = 1/3 \quad x_2 = -1/3$

3.- Resolver la ecuación: $5x^2 - 9 = 46$

$$5x^2 = 46 + 9$$

$$5x^2 = 55$$

$$x^2 = 11$$

$$x = \pm \sqrt{11}$$

$$\therefore \quad x_1 = \sqrt{11} \quad x_2 = -\sqrt{11}$$

4.- Resolver la ecuación: $(x + 5)(x - 5) = -7$.

SOL: $x_1 = \sqrt{18}$ $x_2 = -\sqrt{18}$

5.- Resolver: $\frac{5}{2x^2} - \frac{1}{6x^2} = \frac{7}{12}$

$$\frac{15-1}{6x^2} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{14}{6x^2} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$4 = x^2$$

$$x = \pm \sqrt{4}$$

$$\therefore x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

6.- Resolver: $3 - \frac{3}{4x^2 - 1} = 2$.

SOL: $x_1 = 1$ $x_2 = -1$

7.- Resolver: $\frac{2x-3}{x-3} = \frac{x-2}{x-1}$

$$(2x-3)(x-1) = (x-3)(x-2)$$

$$2x^2 - 2x - 3x + 3 = x^2 - 5x + 6$$

$$2x^2 - 5x + 3 = x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

$$\therefore x_1 = \sqrt{3} \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

Las ecuaciones de segundo grado con coeficiente racionales pueden admitir raíces irracionales o imaginarias. Por ejemplo:

1.- $2x^2 - 5 = 0$

$$2x^2 = 5$$

$$x^2 = 5/2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

2.- $x^2 + 16 = 0$

$$x^2 = -16$$

$$x = \pm \sqrt{-16}$$

$$x = \pm 4i$$

B.- ECUACIONES INCOMPLETAS DE LA FORMA $AX^2 + BX = 0$.-

Sacando x como factor común: $x(ax + b) = 0$

Sabemos que un producto es cero cuando es cero uno cualquiera de sus factores, por lo tanto, podemos escribir que:

$$x = 0 \quad \text{y} \quad ax + b = 0$$

Con lo que tenemos dos ecuaciones de 1^{er} grado, de donde

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Nota: Obsérvese que no es lícito dividir la ecuación por x pues se perdería la raíz $x = 0$. En general, no debe dividirse una ecuación por un factor que contenga la incógnita pues entonces la ecuación obtenida no será equivalente a la propuesta.

EJERCICIO. -

1.- Resolver la ecuación: $3x^2 + 2x = 0$

$$\begin{aligned} x(3x + 2) &= 0 \\ x &= 0 \quad 3x = 2 \\ x_1 &= 0 \quad x_2 = -2/3 \end{aligned}$$

2.- Resolver la ecuación: $x^2 = 5x$.

SOL: $x_1 = 0 \quad x_2 = 5$

3.- Resolver: $(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = -16$

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 - (4x^2 + 20x + 25) &= -16 \\ x^2 - 6x + 9 - 4x^2 - 20x - 25 &= -16 \\ -3x^2 - 26x &= 0 \\ 3x^2 + 26x &= 0 \\ x(3x + 26) &= 0 \\ x &= 0 \quad 3x + 26 = 0 \\ x_1 &= 0 \quad 3x = -26 \\ &\quad x_2 = -26/3 \end{aligned}$$

4.- Resolver $\frac{x^2}{3} - \frac{x - 9}{6} = \frac{3}{2}$.

SOL: $x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{2}$

5.- Resolver $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+4}{x-2} = 1$

$$\frac{(x+1)(x-2) - (x+4)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 1$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - 2 - (x^2 + 3x - 4) &= x^2 - 3x + 2 \\
 x^2 - x - 2 - x^2 - 3x + 4 &= x^2 - 3x + 2 \\
 -x^2 - x &= 0 \\
 x^2 + x &= 0 \\
 x(x + 1) &= 0 \\
 x = 0 & \quad x + 1 = 0 \\
 x_1 = 0 & \quad x_2 = -1
 \end{aligned}$$

C.- ECUACIONES INCOMPLETAS DE LA FORMA $AX^2 = 0$.-

Este caso no ofrece dificultad alguna, si se divide por **a**, la ecuación dada equivale a.

$$x^2 = 0 \quad \text{o} \quad x \cdot x = 0$$

La cual admite las raíces $x_1 = 0$ $x_2 = 0$

EJERCICIO. -

1.- Resolver la ecuación $6x^2 = 0$

$$x^2 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

2.- Resolver: $2x^2 - 5 = 0$.

SOL: $x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$

3.- Resolver: $x^2 + 16 = 0$

$$x^2 = -16$$

$$x = \pm \sqrt{-16}$$

$$x = \pm 4i$$

4.- Resolver: $9x^2 - 1 = 0$.

SOL: $x = \pm 1/3$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES.

Cuando se tiene una ecuación completa de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y el trinomio que forma el primer miembro de la ecuación puede descomponerse en factores por alguno de los métodos estudiados anteriormente, entonces la determinación de las raíces es inmediata, pues basta igualar a cero cada uno de los factores encontrados, como esos factores son del primer grado, la resolución de la ecuación de segundo grado queda reducida a la resolución de dos ecuaciones simples de primer grado.

Las raíces encontradas por este procedimiento son las raíces de la ecuación propuesta.

Para resolver una ecuación de segundo grado por descomposición en factores vamos a seguir los siguientes pasos:

1.- Se simplifica la ecuación y se pone en la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

2.- Se factora el primer miembro de la ecuación.

3.- Se iguala a cero cada caso de los factores y se resuelven las ecuaciones simples que se obtienen.

EJERCICIO. -

1.- Resolver la ecuación: $x^2 + 5x - 24 = 0$

En el miembro de la izquierda tenemos un trinomio de la forma $x^2 + sx + p = 0$, por lo tanto, debemos buscar dos números que multiplicados den -24 y sumados nos de 5. Los números son 8 y -3, por lo tanto, la ecuación dada se puede escribir.

$$(x + 8)(x - 3) = 0$$

Igualamos a cero cada uno de los factores.

$$x + 8 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

de donde

$$x_1 = -8$$

$$x_2 = 3$$

2.- Resolver la ecuación: $6x^2 - 7x - 3 = 0$

$6x^2 - 7x - 3$ Es un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, descomponiendo en factores tenemos.

$$\frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6} = (2x - 3)(3x + 1) = 0$$

Igualandos a cero:

$$2x - 3 = 0$$

$$3x + 1 = 0$$

$$x_1 = 3/2$$

$$x_2 = -1/3$$

Nota. - No siempre es posible la descomposición en factores con coeficientes racionales de un trinomio, como vimos anteriormente.

Por ejemplo, el trinomio $x^2 + x + 1$, no se puede descomponer en factores dentro del campo de las racionales, debido a esto necesitaremos estudiar otros métodos para la resolución de la ecuación de segundo grado, sin embargo; siempre que la descomposición en factores sea fácil deberá preferirse este método pues proporciona las raíces con mayor rapidez que ningún otro.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO POR EL MÉTODO DE COMPLETAR UN CUADRO PERFECTO. -

A un binomio de la forma $x^2 + mx$ (con $m + o -$) le falta el cuadrado de la mitad de **m**, para ser un cuadrado perfecto o sea el término: $\left(\frac{m}{2}\right)^2$

Por ejemplo, a: $x^2 + 8x$, falta agregarle $\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$

Para que el trinomio resultante sea cuadrado perfecto.

Igualmente, a: $x^2 - 5x$, hay que agregarle $(-5/2)^2 = 25/4$ para obtener un cuadrado perfecto: $x^2 - 5x + 25/4$.

Esta observación nos permite resolver cualquier ecuación de segundo grado, completando en el primer miembro de la ecuación un cuadrado perfecto, en la forma que se indica en los siguientes:

EJERCICIO. -

1.- Resolver la ecuación: $x^2 + 6x - 7 = 0$

Pasamos el término independiente al segundo miembro, con lo que se tiene:

$$x^2 + 6x = 7$$

En el primer miembro completamos el cuadrado perfecto, agregando $(6/2)^2 = 9$, por lo que para que no se altere la ecuación sumamos 9 en ambos miembros.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= 7 + 9 \\ x^2 + 6x + 9 &= 16 \\ (x + 3)^2 &= 4^2 \end{aligned}$$

Si se extrae la raíz cuadrada en ambos miembros nos queda que:

$$x + 3 = \pm 4$$

De donde: $x = -3 \pm 4$
 $x_1 = -3 + 4 = 1$ $x_2 = -3 - 4 = -7$

Raíces de la ecuación propuesta.

Observación. - No se obtendría nada nuevo anteponiendo el signo – al miembro izquierdo de la ecuación, pues de: $-(x + 3) = \pm 4$

Se tienen:

$$\begin{aligned} -x - 3 &= 4 & -x - 3 &= -4 \\ x + 3 &= -4 & x + 3 &= 4 \end{aligned}$$

Que son las mismas ecuaciones obtenidas anteriormente.

2.- Resolver la ecuación $3x^2 - 5x + 1 = 0$.

SOL: $x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$ y $x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$

3.- Resolver la ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$

Al aplicar el mismo procedimiento se tiene:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= -13 & (-4/2)^2 &= 4 \\ x^2 - 4x + 4 &= -13 + 4 \\ (x - 2)^2 &= -9 \\ x - 2 &= \pm 3i \end{aligned}$$

$$x = 2 \pm 3i$$

$$\therefore x_1 = 2 + 3i \quad y \quad x_2 = 2 - 3i$$

FÓRMULA PARA RESOLVER LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. -

La ecuación con coeficientes literales: $ax^2 + bx + c = 0$ representa cualquier ecuación de segundo grado.

Vamos a resolver esta ecuación por el método de completar el cuadrado perfecto. De este modo obtendremos un resultado general o fórmula mediante la cual podremos resolver cualquier ecuación particular de segundo grado, sustituyendo simplemente en esta fórmula los valores de los coeficientes.

Para resolver $ax^2 + bx + c = 0$, comencemos por dividir ambos miembros de la ecuación por

el coeficiente de x^2 , con lo que tenemos: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Pasemos el último término al segundo miembro. $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

Completamos el cuadro perfecto en el primer miembro agregado: $\left(\frac{b/a}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$. Sumamos $b^2/(4a^2)$ en ambos miembros.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

De donde:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De donde

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula de resolución de la ecuación general de segundo grado. Este resultado nos dice que una ecuación de segundo grado admite siempre dos raíces.

EJERCICIO. -

1.- Resolver la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$

En esta ecuación: $a = 2$ $b = 5$ $c = -3$

Sustituyendo en la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

Comprobación:

$$\begin{array}{ll} \text{Con } x_1 = 1/2 & 2(1/2)^2 + 5(1/2) - 3 = 1/2 + 5/2 - 3 = 0 \\ \text{Con } x_2 = -3 & 2(-3)^2 + 5(-3) - 3 = 18 - 15 - 3 = 0 \end{array}$$

2.- Resolver la ecuación: $x^2 - 8x + 13 = 0$.

SOL: $\therefore x_1 = 4 + \sqrt{3} \qquad x_2 = 4 - \sqrt{3}$

3.- Resolver la ecuación: $x^2 - 6x + 25 = 0$

$$a = 1 \qquad b = -6 \qquad c = 25$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(1)(25)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$$

$$\therefore x_1 = 3 + 4i \qquad x_2 = 3 - 4i$$

Comprobación:

$$\begin{array}{ll} \text{Con } x_1 = 3 + 4i & (3 + 4i)^2 - 6(3 + 4i) + 25 = 9 + 24i + 16i^2 - 18 - 24i + 25 = 0 \\ & = 9 - 16 - 18 + 25 = 0 \\ \text{Con } x_2 = 3 - 4i & (3 - 4i)^2 - 6(3 - 4i) + 25 = 9 - 24i + 16i^2 - 18 + 24i + 25 = 0 \\ & = 9 - 16 - 18 + 25 = 0 \end{array}$$

Nota. - El coeficiente a de $ax^2 + bx + c = 0$, puede ser positivo o negativo, pero al aplicar la fórmula es más ventajoso tener a positivo, lo cual puede lograrse en el caso de que $a < 0$, multiplicando la ecuación por -1 .

$$-3x^2 - 7x + 3 = 0 \quad 3x^2 + 7x - 3 = 0$$

RESOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO FRACCIONARIAS. -

Para llevar una ecuación fraccionaria a la forma entera basta multiplicar ambos miembros de la ecuación por el MCM de los denominadores de las fracciones simples que aparezcan en la ecuación, ponemos la ecuación en la forma general, y lo resolvemos por cualquiera de los procedimientos estudiados.

NOTA. - Conviene no olvidar que cuando una ecuación se multiplica por una expresión que contiene la incógnita, la ecuación resultante no es en general equivalente a la ecuación original, la operación realizada puede introducir “**RAÍCES EXTRAÑAS**” que es preciso eliminar por sustitución directa en la ecuación dada, si alguna de las raíces encontradas anula a algún denominador de la ecuación de partida, se desechará este valor ya que será una raíz extraña.

EJERCICIO. –

1.- Resolver la ecuación: $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-3} = \frac{2}{x-4}$

El MCM de los denominadores es $(x-2)(x-3)(x-4)$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por este producto tenemos:

$$\begin{aligned} 3(x-3)(x-4) + 2(x-2)(x-4) &= 2(x-2)(x-3) \\ 3(x^2 - 7x + 12) + 2(x^2 - 6x + 8) &= 2(x^2 - 5x + 6) \\ 3x^2 - 21x + 36 + 2x^2 - 12x + 16 &= 2x^2 - 10x + 12 \\ 3x^2 - 23x + 40 &= 0 \end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula: $a = 3$ $b = -23$ $c = 40$

$$\begin{aligned} x &= \frac{23 \pm \sqrt{529 - 480}}{6} = \frac{23 \pm 7}{6} \\ \therefore x_1 &= \frac{23+7}{6} = 5 & x_2 &= \frac{23-7}{6} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Comprobación: (en la ecuación original).

$$\text{Con } x_1 = 5 \quad \frac{3}{5-2} + \frac{2}{5-3} = \frac{2}{5-4} \quad \text{Con } x_2 = 8/3 \quad \frac{3}{8/3-2} + \frac{2}{8/3-3} = \frac{2}{8/3-4}$$

$$\frac{3}{3} + \frac{2}{2} = 2$$

$$2 = 2$$

$$\frac{9}{2} - 6 = -3/2$$

$$-3/2 = -3/2$$

2.- Resolver la ecuación: $\frac{x^2 - 3}{x - 5} = 8 + \frac{22}{x - 5}$.

SOL: $x_1 = 5$ $x_2 = 3$

3.- Resolver: $\frac{1}{3x} = \frac{7}{5x^2} - \frac{11}{60}$

Quitando denominadores (DC = $60x^2$)

$$20x = 84 - 11x^2$$

Trasponiendo

$$11x^2 + 20x - 84 = 0$$

Aplicando la fórmula se obtiene.

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -42/11$$

4.- $\frac{x^2 + x + 3}{x^2 - x + 3} = \frac{2x + 5}{2x + 7}$

$$(x^2 + x + 3)(2x + 7) = (x^2 - x + 3)(2x + 5)$$

$$2x^3 + 2x^2 + 6x + 7x^2 + 7x + 21 = 2x^3 - 2x^2 + 6x + 5x^2 - 5x + 15$$

$$6x^2 + 12x + 6 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x + 1)^2 = 0$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -1$$

5.- $\frac{x}{5} + 30x^{-1} = 5$

$$\frac{x}{5} + \frac{30}{x} = 5$$

$$\frac{x^2 + 150}{5x} = 5$$

$$x^2 - 25x + 150 = 0$$

$$(x - 15)(x - 10) = 0$$

$$x_1 = 15$$

$$x_2 = 10$$

6.- $\frac{\frac{1}{3}}{x} = \frac{1 - x}{x + \frac{1}{3}}$

SOL: $x_1 = \frac{1}{3}$ $x_2 = \frac{1}{3}$

$$7.- \frac{x+4}{3} - \frac{7-x}{x-3} = \frac{4x+7}{9} - 1$$

$$\frac{(x+4)(x-3) - (7-x)3}{3(x-3)} = \frac{4x+7-9}{9}$$

$$3(x^2 + 4x - 33) = 4x^2 - 12x - 2x + 6$$

$$x^2 - 26x + 105 = 0$$

$$x_1 = 21$$

$$x^2 + x - 12 - 21 + 3x = \frac{(4x-2)(x-3)}{3}$$

$$3x^2 + 12x - 99 = 4x^2 - 14x + 6$$

$$(x-21)(x-5) = 0$$

$$x_2 = 5$$

$$8.- 2x^2 - \frac{6x}{11} - \frac{3x}{4} = \frac{22}{3}x^2 - \frac{9}{44} - \frac{11x}{4}.$$

$$\text{SOL: } x_1 = \frac{3}{8} \quad x_2 = \frac{-9}{88}$$

$$9.- \left(\frac{20x}{3} - 1 \right)x - \frac{19}{3} \left(\frac{4x}{3} - \frac{1}{5} \right) = 0$$

$$\frac{20x^2}{3} - x - \frac{76x}{9} + \frac{19}{15} = 0$$

$$\frac{20x^2}{3} - \frac{85}{9}x + \frac{19}{15} = 0 \quad (*45)$$

$$300x^2 - 425x + 57 = 0$$

$$x = \frac{425 \pm \sqrt{425^2 - 4(300)(57)}}{600} = \frac{425 \pm 335}{600}$$

$$x_1 = \frac{425 + 335}{600} = \frac{760}{400} = \frac{19}{15}$$

$$x_2 = \frac{425 - 335}{600} = \frac{90}{600} = \frac{3}{20}$$

$$10.- x + \frac{1}{x} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{SOL: } x_1 = \sqrt{3} \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON LITERALES. –

Se resuelven de la misma manera que las ecuaciones con coeficientes numéricos, esto es: por descomposición en factores, completando un cuadrado perfecto o por la formula general.

A continuación, vamos a resolver algunas ecuaciones de segundo grado que tienen como coeficientes expresiones algebraicas diversas.

EJERCICIO. –

1.- Resolver la ecuación: $x^2 - 2mx = 3m^2$

Ponemos la ecuación en la forma general: $(ax + bx + c = 0)$: $x^2 - 2mx - 3m^2 = 0$

Vamos a resolver utilizando las tres posibilidades de solución

A.- Por descomposición en factores: Verificamos dos expresiones que multiplicadas nos de $3m^2$ y sumadas $2m$

$$(x - 3m)(x + m) = 0$$

De donde tenemos: $x - 2m = 0$

$$\therefore x_1 = 3m$$

$x + m = 0$

$$x_2 = -m$$

B.- Completando el cuadrado perfecto: $x^2 - 2mx + \left(\frac{2m}{2}\right)^2 = 3m^2 + \left(\frac{2m}{2}\right)^2$

$$x^2 - 2mx + m^2 = 3m^2 + m^2$$

$$(x - m)^2 = 4m^2$$

$$x - m = \pm 2m$$

$$x = m \pm 2m$$

$$\therefore x_1 = 3m$$

$$x_2 = -m$$

C.- Por medio de la formula General: $a = 1$ $b = -2m$ $c = -3m^2$

$$x = \frac{2m \pm \sqrt{4m^2 - 4(1)(-3m^2)}}{2} = \frac{2m \pm \sqrt{16m^2}}{2} = \frac{2m \pm 4m}{2}$$

$$\therefore x_1 = 3m$$

$$x_2 = -m$$

En general, en casos sencillos, como el de la ecuación anterior es preferible utilizar el primer método o el segundo.

En casos más difíciles (Ecuaciones con coeficientes complicados), es recomendable utilizar el tercer método.

2.- Resolver la Ecuación:

$$(p^2 - q^2)x^2 - 2(p^2 + q^2)x + (p^2 - q^2) = 0$$

SOL: $x_1 = \frac{p+q}{p-q}$ $x_2 = \frac{p-q}{p+q}$

3.- Resolver la Ecuación: $\frac{m+n}{x+n} + \frac{m-n+x}{m+n+x} = 2$

Multiplicado por el m.c.m. de los denominadores m.c.m. = $(x+n)(m+n+x)$

$$(m+n)(m+n+x) + (m-n+x)(x+n) = 2(x+n)(m+n+x)$$

$$m^2 + mn + mx + mn + n^2 + nx + mx + mn - nx - n^2 + x^2 + nx = 2(mx + nx + x^2 + mn + n^2 + nx)$$

$$x^2 + m^2 + 3mn + 2mx + nx = 2mx + 4nx + 2x^2 + 2mn + 2n^2$$

$$-x^2 + mn - 3nx + m^2 - 2n^2 = 0$$

$$x^2 + 3nx + (2n^2 - mn - m^2) = 0$$

Aplicando la formula $a = 1$ $b = 3n$ $c = 2n^2 - mn - m^2$

$$x = \frac{-3n \pm \sqrt{(3n)^2 - 4(1)(2n^2 - mn - m^2)}}{2} = \frac{-3n \pm \sqrt{9n^2 - 8n^2 + 4mn + 4m^2}}{2}$$

$$x = \frac{-3n \pm \sqrt{n^2 + 4mn + 4m^2}}{2} = \frac{-3n \pm \sqrt{(n+2m)^2}}{2} = \frac{-3n \pm (n+2m)}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3n + n + 2m}{2} = \frac{-2n + 2m}{2} = -n + m$$

$$x_2 = \frac{-3n - n - 2m}{2} = \frac{-4n - 2m}{2} = -2n - m$$

Ninguno de estos valores anula el m.c.m.

4.- $m^{-1}x^2 - m^{-2}x = x - m^{-1}$.

SOL: $x_1 = \frac{1}{m}$ $x_2 = m$

5.- $x^2 + \frac{b}{a}[(1+a)x + b] - a[x + b - (a-x)1/b] = 1$

$$x^2 + \frac{b}{a}[x + ax + b] - a\left[x + b - \frac{a}{b} + \frac{x}{b}\right] = 1$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + bx + \frac{b^2}{a} - ax - ab + \frac{a^2}{b} - \frac{ax}{b} = 1$$

$$x^2 + x\left(\frac{b}{a} + b - a - \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b^2}{a} - ab + \frac{a^2}{b} - 1\right) = 0$$

$$x^2 + x \frac{b^2 + ab^2 - a^2b - a^2}{ab} + \frac{b^3 - a^2b^2 + a^3 - ab}{ab} = 0$$

$$abx^2 - x(a^2 + a^2b - ab^2 - b^2) + (a^3 - a^2b^2 - ab + b^3) = 0$$

$$\pm \frac{a^2(a-b^2) - b(a-b^2)}{(a-b^2)(a^2-b)} \pm \frac{(a-b^2)(a^2-b)(a-b^2)(a^2-b)}{a, b}$$

x^2	x^1	x^0	$\frac{a-b^2}{b} = \frac{a}{b} - b$
ab	$-a^2 - a^2b + ab^2 + b^2$ $a^2 \quad -ab^2$	$a^3 - a^2b^2 - ab + b^3$ $-a^3 + a^2b^2 + ab - b^3$	
ab	$-a^2b$	$+b^2$	
		0	

$$\left(x - \frac{a-b^2}{b}\right)(abx - a^2b + b^2) = 0$$

$$\left(\frac{bx - a + b^2}{b}\right)b(ax - a^2 + b) = 0$$

$$(bx - a + b^2)(ax - a^2 + b) = 0$$

$$x_1 = \frac{a-b^2}{b} \quad x_2 = \frac{a^2-b}{a}$$

EJERCICIOS: ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

$$1. \frac{x}{5} + 30x^{-1} = 5$$

$$1. x_1 = 15 \quad x_2 = 10$$

$$2. \frac{x+4}{3} - \frac{7-x}{x-3} = \frac{4x+7}{9} - 1$$

$$2. x_1 = 21 \quad x_2 = 5$$

$$3. \frac{1/3}{x} = \frac{1-x}{x+1/3}$$

$$3. x = 1/3$$

$$4. \left(\frac{20x}{3} - 1 \right) x - \frac{19}{3} \left(\frac{4x}{3} - \frac{1}{5} \right) = 0$$

$$4. x_1 = 3/20 \quad x_2 = 19/15$$

$$5. 2x^2 - \frac{6x}{11} - \frac{3x}{4} = \frac{22x^2}{3} - \frac{9}{44} - \frac{11x}{4}$$

$$5. x_1 = 3/8 \quad x_2 = -9/88$$

$$6. x + \frac{1}{x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$6. x_1 = \sqrt{3} \quad x_2 = \sqrt{3}/3$$

$$7. \left(6x - \frac{2}{3} \right) x - 2 \left(x - \frac{1}{9} \right) = 0$$

$$7. x_1 = 1/3 \quad x_2 = 1/9$$

$$8. (x-0,1)^2 - (x+0,2)^2 + (x+0,3)^2 = 0,185$$

$$8. x_1 = 1/3 \quad x_2 = -1/3$$

$$9. \frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}} + \frac{1+2x^{-1}}{1-2x^{-1}} = \frac{2+13x^{-1}}{1+x^{-1}}$$

$$10. \frac{x^3-4x}{x-2} + \frac{x^2-1}{x+1} = 39$$

$$11. \frac{x}{1-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{12}$$

$$12. m^{-1}x^2 - m^{-2}x = x - m^{-1}$$

$$13. \frac{(m+n)x^2}{m^2} = \frac{2x-1}{m-n}$$

$$14. b\left(x^2 - \cancel{bx/a}\right) - ax + b = 0$$

$$15. \frac{x}{b(a+b)} + \frac{a}{(a+b)x} = \frac{1}{b}$$

$$16. \frac{dx^2}{a+b} - \frac{(a+c)bx}{a+b} + \frac{(a+c)bc}{d} = cx$$

$$17. \frac{(x-a-b)4x}{a+b+c} + a + b = c$$

$$9. x_1 = 5 \quad x_2 = 1,2$$

$$10. x_1 = 5 \quad x_2 = -8$$

$$11. x_1 = -\frac{1}{4} \quad x_2 = -\frac{1}{6}$$

$$12. x_1 = m \quad x_2 = \frac{1}{m}$$

$$13. x_1 = \frac{m}{m+n} \quad x_2 = \frac{m}{m-n}$$

$$14. x_1 = \frac{a}{b} \quad x_2 = \frac{b}{a}$$

$$15. x_1 = -a \quad x_2 = -b$$

$$16. x_1 = \frac{(a+b)c}{d} \quad x_2 = \frac{(a+c)b}{d}$$

$$17. x_1 = \frac{a+b+c}{2} \quad x_2 = \frac{a+b-c}{2}$$

$$18. \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)x - \left(\frac{a}{bc} - \frac{c}{ab}\right)x = \frac{b}{ac} - \frac{x^2}{b}$$

$$19. \frac{a^n}{2ma^n - 2mx} + \frac{b^n}{2mb^n - 2mx} = \frac{1}{m}$$

$$20. \frac{1+a}{a} + \frac{1+b}{b} + \frac{1+x}{x} = \frac{1}{a+b+x} + 3$$

$$21. \frac{(a-x)^2 - (x-b)^2}{(a-x)(x-b)} = \frac{4ab}{a^2 - b^2}$$

$$22. \left(1 + \frac{d}{c}\right)(c-d)x + 2\left(\frac{bd}{c} - a\right) + (a^2 - b^2)c^{-1}x^{-1} = 0$$

$$23. 90x^2 + (15a - 114)x - 15a^2 - 7a + 36 = 0$$

$$24. \frac{x(x-2a)}{\sqrt{bc}} + \frac{a-x}{\sqrt{c}} - \frac{a-x}{\sqrt{b}} = 1 - \frac{a^2}{\sqrt{bc}}$$

$$18 \quad x_1 = \frac{a-b}{c} \quad x_2 = \frac{b-c}{a}$$

$$19 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{a^n + b^n}{2}$$

$$20 \quad x_1 = -a \quad x_2 = -b$$

$$21 \quad x_1 = \frac{a^2 + b^2}{2b} \quad x_2 = \frac{a^2 + b^2}{2a}$$

$$22 \quad x_1 = \frac{a-b}{c-d} \quad x_2 = \frac{a+b}{c+d}$$

$$23 \quad x_1 = \frac{(9+15a)}{15} \quad x_2 = \frac{(4-3a)}{6}$$

$$24 \quad x_1 = a + \sqrt{b} \quad x_2 = a - \sqrt{c}$$

$$25. \sqrt{a+b}(x^2 - 2a^{-1/2}x) - 2x + 4a^{-1/2} = 0$$

$$25 \quad x_1 = 2/\sqrt{a} \quad x_2 = 2/\sqrt{a+b}$$

$$26. \frac{x-\sqrt{2}}{3} + \frac{(x-\sqrt{2})^2}{5} = \frac{8}{15}$$

$$26 \quad x_1 = 1 + \sqrt{2} \quad x_2 = -8/3 + \sqrt{2}$$

$$27. \frac{x}{1 - \frac{m}{x-1/m}} = m(1-m^2)$$

$$27 \quad x_1 = m \quad x_2 = \frac{1-m^4}{m}$$

$$28. \frac{(1+ax)^2 - (a+x)^2}{1-a^2} \div \sqrt{4 + \sqrt{16x^2 + 8x^3 + x^4}} = 2$$

$$28 \quad x_1 = -1 + \sqrt{-2} \quad x_2 = -1 - \sqrt{-2}$$

$$29. \frac{x^2 - x - a}{x^2 + x - 3a} = \frac{a^2}{a^2 + 2}$$

$$29 \quad x_1 = a+1 \quad x_2 = a^2 - a$$

$$30. \frac{x^2}{(a+b)^2} - (a-b)^2 = \frac{4abx}{(a+b)^2}$$

$$30 \quad x_1 = (a+b)^2 \quad x_2 = -(a-b)^2$$

$$31. \frac{3ax}{ax+2} + \frac{2ax}{ax+1} = \frac{6}{ax+2}$$

$$31 \quad x_1 = \frac{1}{a} \quad x_2 = -\frac{6}{5a}$$

$$32. \frac{x-a}{(x-b)^2+1} = \frac{b}{a^2+1}$$

$$32. x_1 = a+b \quad x_2 = \frac{a^2-ab+b^2+1}{b}$$

$$33. \frac{x+b}{a^2-9b^2} - \frac{x+7b}{ax+3bx} + \frac{x+b}{ax-3bx} = \frac{1}{a+3b}$$

$$33. x_1 = a-4b \quad x_2 = -6b$$

$$34. \frac{x-a-b}{ax} + \frac{x-2a}{(2a-b)b} = \frac{4a}{x(2a-b)}$$

$$34. x_1 = 2a+b \quad x_2 = \frac{b^2-3ab}{a}$$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON RADICALES. -

Ahora veremos algunos ejemplos de ecuaciones con radicales cuya racionalización conduce a una ecuación de segundo grado.

Para la resolución de una ecuación con radicales seguiremos los siguientes pasos:

1. Racionalización de la ecuación, esto se consigue por elevaciones a potencias o mediante factores racionalizantes.
2. Resolución de la ecuación obtenida.
3. Verificación de las raíces encontradas en la ecuación original para desechar las raíces extrañas que se hayan podido introducir en el proceso de racionalización.

EJERCICIO. -

1.- Resolver la ecuación: $\sqrt{x+7} + 1 = 2x$

Aislando el radical en un solo miembro, se tiene: $\sqrt{x+7} = 2x - 1$

Elevamos al cuadrado, ambos miembros: $x + 7 = 4x^2 - 4x + 1$

Poniendo en la forma general: $4x^2 - 5x - 6 = 0$

Resolviendo:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(4)(-6)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{5 \pm 11}{2}$$

$$\therefore x_1 = 2 \quad x_2 = -\frac{3}{4}$$

Verificación:

Con $x_1 = 2$ $\sqrt{2+7} + 1 = 2 \cdot 2$
 $3+1 = 4$
 $4=4$

Con $x_2 = -\frac{3}{4}$ $\sqrt{-\frac{3}{4}+7} + 1 = 2\left(-\frac{3}{4}\right)$
 $\sqrt{\frac{25}{4}} + 1 = -\frac{3}{2}$
 $\frac{5}{2} + 1 = -\frac{3}{2}$
 $\frac{7}{2} \neq -\frac{3}{2} \quad \therefore x = -\frac{3}{4} \text{ ES UNA RAÍZ EXTRAÑA.}$

2.- Resolver la ecuación: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x+10}$.

SOL: $x_1 = 5$

3.- Resolver: $\sqrt{4x-3} - \sqrt{x-2} = \sqrt{3x-5}$

Elevando al cuadrado: $4x-3 - 2\sqrt{4x-3}\sqrt{x-2} + x-2 = 3x-5$

Aislando el radical: $-2\sqrt{4x^2-11x+6} = 3x-5-4x+3-x+2$

$$+2\sqrt{4x^2-11x+6} = +2x$$

$$\sqrt{4x^2-11x+6} = x$$

$$4x^2-11x+6 = x^2$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 3x^2-11x+6=0 \\ (3x-9)(3x-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ (x-3)(3x-2)=0 \end{array}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

Verificación:

$$\text{Con } x_1 = 3 \quad \sqrt{12-3} - \sqrt{3-2} = \sqrt{9-5}$$

$$3-1=2$$

$$2=2$$

$$\text{Con } x_2 = \frac{2}{3} \quad \sqrt{\frac{8}{3}-3} - \sqrt{\frac{2}{3}-2} = \sqrt{2-5}$$

$$\sqrt{\frac{-1}{3}} - \sqrt{\frac{-1}{3}} = \sqrt{-3}$$

$$-2\sqrt{\frac{-1}{3}} \neq \sqrt{-3} \quad \therefore x_2 = \frac{2}{3} \text{ NO ES RAÍZ DE LA}$$

ECUACIÓN PROPUESTA;

ES UNA ECUACIÓN EXTRAÑA

LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN ES: $x=3$

EJERCICIOS: ECUACIONES CON RADICALES. –

$$1. \sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$$

$$2. \sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}} = 1$$

$$3. \sqrt[4]{5x^2+3x-11} = \sqrt{4x-7}$$

$$4. \sqrt{3x-6} + \sqrt{2x+6} = \sqrt{9x+4}$$

$$5. \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 4\sqrt{x^2-1}$$

$$6. \sqrt{1-a} \cdot 4\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{1+a} \cdot 4\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} = 2\sqrt[4]{1-a^2}$$

$$7. \frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} + \frac{6-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$$

$$8. \frac{a+x+\sqrt{ax}}{b+c+\sqrt{bc}} = \frac{a}{b}$$

$$9. 2\sqrt{\frac{x}{5}-2} = 2 + \sqrt{\frac{x}{6}-1}$$

$$1. x_1 = (a^2 - b)/a$$

$$x_2 = (a - b^2)/b$$

$$2. x = 4$$

$$3. x = 4$$

$$4. x_1 = 5$$

$$x_2 = -4$$

$$5. x_1 = \sqrt{2}$$

$$x_2 = -\sqrt{2}$$

$$6. x = a$$

$$7. x_1 = 9$$

$$x_2 = 1,44$$

$$8. x = \frac{ac}{b}$$

$$9. x = 30$$

$$10. \frac{\sqrt{x^2 - 7a^2 + 8a^3}}{a - x} - \frac{\sqrt{x + a}}{\sqrt{a - x}} = 0$$

$$10. x_1 = 2a\sqrt{1 - a}$$

$$x_2 = -2a\sqrt{1 - a}$$

$$11. 1 - x = \sqrt{1 - x}\sqrt{4 - 7x^2}$$

$$11. x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$12. (\sqrt{5 + x} - \sqrt{5 - x})^{-1} + (\sqrt{5 + x} + \sqrt{5 - x})^{-1} = \frac{3}{4}$$

$$12. x = 4$$

$$13. \sqrt{x^2 + x + 4} = 2 + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

$$13. x_1 = 3$$

$$x_2 = 5/7$$

$$14. (x^3 - 8x^2 + x - 14)^{1/2} - \frac{1}{2}(4x^3 - 30x^2 - 20x - 16)^{1/2} = 0$$

$$14. x_1 = 10$$

$$x_2 = 2$$

$$15. [(3 + x^2)x^{-3}]^{1/2} = [1/3(9x^{-3} + x^{-2})]^{1/2}$$

$$15. x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

$$16. \sqrt{a^2 + 1 - 2x} = 2a - \sqrt{2x + a^2 + 1}$$

$$16. x = 9$$

$$x = \pm a$$

$$17. \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}} = 2$$

$$17. x = 5$$

$$18. \sqrt{a^2 + x^2} - x = \frac{13a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$18. x = -\frac{12a}{5}$$

$$19. \sqrt{\frac{2x+2}{x-3}} + \sqrt{\frac{x-3}{2x+2}} = \frac{5}{2}$$

$$19. x_1 = 7$$

$$x_2 = -\frac{11}{7}$$

$$20. \sqrt{6a+x} + \sqrt{4a-x} = \frac{12a}{\sqrt{6a+x}}$$

$$20. x_1 = 2a$$

$$x_2 = 3a$$

$$21. \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}} = x-3$$

$$21. x_1 = 4$$

$$x_2 = 5$$

$$22. \frac{1}{\sqrt{3a+x} - \sqrt{a-x}} + \frac{1}{\sqrt{3a+x} + \sqrt{a-x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$22. x = a$$

ECUACIONES REDUCIBLES A ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. -

Vamos a considerar algunos ejemplos de ecuaciones de segundo grado superior que son reducibles a ecuaciones de segundo: sea la ecuación:

$$ax^{2n}+bx^n+c = 0$$

Si hacemos: $x^{2n} = y^2 \wedge x^n = y$

Tenemos una ecuación de segundo grado

$$ay^2+by+c = 0$$

EJERCICIO. -

1.- Resolver: $4x^4-13x^2+3 = 0$

Haciendo: $x^2 = y$ se obtiene la ecuación de segundo grado: $4y^2-13y+3 = 3$
Resolviendo esta ecuación por la formula tenemos:

$$y = \frac{+13 \pm \sqrt{169 - 48}}{8} = \frac{13 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{13 \pm 11}{6}$$

$$y_1 = 3 \qquad y_2 = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo y resulta:

$$x^2 = 3 \qquad x^2 = \frac{1}{4}$$

De donde se obtiene:

$$\begin{array}{ll} X_1 = \sqrt{3} & x_3 = \frac{1}{2} \\ X_2 = -\sqrt{3} & x_4 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Estos cuatro valores, son todos raíces de la ecuación propuesta.

- El número de raíces o soluciones de una ecuación algebraica es siempre igual al grado de la ecuación.

2.- Resolver: $x^{2/3} + 4x^{1/3} - 12 = 0.$

SOL: $x_1 = -216 \qquad x_2 = 8$

3.- Resolver:

$$(x^2 + 2x)^2 - 23(x^2 + 2x) + 120 = 0$$

Si hacemos: $x^2 + 2x = y$

Tenemos: $y^2 - 23y + 120 = y$

Resolviendo por factores: $(y - 15)(y - 8) = 0$

Tenemos: $y = 15 \quad y = 8$

Sustituyendo y se tiene:

$$x^2 + 2x = 15$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x^2 + 2x = 8$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Resolviendo por factorización los trinomios tenemos:

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

La ecuación tiene cuatro raíces

$$x_1 = -5$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = -4$$

$$x_4 = 2$$

4.- Resolver: $(x^4 - 16) = 0$.

SOL: $x_1 = 2i \quad x_2 = -2i \quad x_3 = -2 \quad x_4 = 2$

5.- Resolver:

$$x^3 - 27 = 0$$

Descomponiendo en factores: $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 0$

Igualando a cada uno de estos factores.

$$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$$

$x^2 + 3x + 9 = 0$ Aplicando la fórmula:

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 36}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{-3}}{2} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

La ecuación tiene 3 raíces: $x_1 = 3; x_2 = x_1 = 3; x_3 = \frac{-3 + 3\sqrt{3}i}{2}; x_4 = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{2}$

6.- Resolver: $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$.

SOL: $x_1 = 3 \quad x_2 = -3 \quad x_3 = \frac{1}{2} \quad x_4 = -\frac{1}{2}$

7.- Resolver la ecuación:

$$3x^4 - 46x^2 - 32 = 0$$

Por descomposición en factores:

$$\frac{(3x^2 - 48)(3x^2 + 2)}{3} = 0$$

$$(x^2 - 16)(3x^2 + 2) = 0$$

Igualando a cero los factores:

$$x^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 4$$

$$3x^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm \sqrt{-\frac{2}{3}} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}i$$

Las cuatro soluciones son: $x_1 = 4$ $x_2 = -4$ $x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}i$ $x_4 = -\sqrt{\frac{2}{3}}i$

8.- Resolver la ecuación: $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$.

9.- Resolver

$$x^{4/3} - 6x^{2/3} + 8 = 0$$

Haciendo: $x^{2/3} = y$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

Factorando: $(y - 4)(y - 2) = 0$

Igualando a cero: $y = 4$

$y = 2$

Sustituyendo: $x^{2/3} = 4$

$x^{2/3} = 2$

$$\sqrt[3]{x^2} = 4$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 2$$

Elevando al cubo: $x^2 = 64$

$x^2 = 8$

$$x = \pm 8$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

10.- $\frac{2}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{2}{x-\sqrt{2-x^2}}.$

SOL: $x = 0$ $x = \pm \sqrt{3}$

11.- $\sqrt{1-a} \cdot \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{1+a} \cdot \sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} = 2 \sqrt[4]{1-a^2}$

$$\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} = y \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{y}$$

$$\sqrt{1-a} \cdot y + \sqrt{1+a} \cdot \frac{1}{y} - 2\sqrt[4]{1-a^2} = 0$$

$$\sqrt{1-a} y^2 - 2 \sqrt[4]{(1+a)(1-a)} y + \sqrt{1+a} = 0$$

$$\sqrt[4]{1-a} y \qquad \qquad \qquad \sqrt[4]{1+a}$$

$$2\sqrt[4]{1-a} \cdot \sqrt[4]{1+a} y$$

$$(\sqrt[4]{1-ay} - \sqrt[4]{1+a})^2 = 0$$

$$y_{1,2} = \sqrt[4]{\frac{1+a}{1-a}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt[4]{\frac{1+a}{1-a}}$$

$$(1+x)(1-a) = (1+a)(1-x)$$

$$1-a+x-ax=1-x+a-ax$$

$$2x = 2a$$

$$x_1 = a$$

$$x_2 = a$$

EJERCICIOS: ECUACIONES REDUCIBLES. -

1.- $2x^4 - 3x^2 - 20 = 0$

1.- $x_{1,2} = \pm 2$

$x_{3,4} = \pm \sqrt{-5/2}$

2.- $\frac{ax^2}{b} - \frac{(a-b)x^2}{b} = 1$

2.- $x_{1,2} = \pm 1$

$x_{3,4} = \pm \sqrt{(b-a)/a}$

3.- $\frac{x^3 + a^3}{x + a} = 3a^2$

3.- $x_1 = 2a$

$x_2 = -a$

4.- $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 24$

4.- $x_1 = 3$

$x_2 = -2$

$x_{3,4} = (1 \pm \sqrt{-15})/2$

5.- $x^6 - 19x^3 = 216$

5.- $x_1 = 3$

$x_2 = -2$

6.- $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

6.- $x_1 = 4$

$x_2 = 3$

7.- $\left(x + 1 + \frac{6}{x}\right)\left(x - 1 + \frac{6}{x}\right) = 24$

7.- $x_{1,2} = \pm 3$

$x_{3,4} = \pm 2$

8.- $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x = 0$

8.- $x_1 = 0$

$x_2 = 2$

$x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}$

9.- $x^4 - 2x^3 + x = 2$

9.- $x_1 = 2$

$x_2 = -1$

$x_{3,4} = (1 \pm \sqrt{-3})/2$

10.- $x^2 + x + 1 = \frac{42}{x^2 + x}$

10.- $x_1 = 2$

$x_2 = -3$

11.- $x^8 - x^4 - 240 = 0$

11.- $x_{1,2} = \pm 2$

$x_{3,4} = \pm 2 \sqrt[4]{-1}$

$x_{5,6} = \pm \sqrt[4]{-15}$

$x_{7,8} = \pm \sqrt{-\sqrt{-15}}$

12.- $x^{5/6} + x^{5/3} = 1056$

12.- $x_1 = 64$

$x_2 = (-33)^{6/5}$

$$13.- 2x^3 - \sqrt{x}^3 = 120$$

$$13.- x_1 = 4$$

$$x_2 = (-15/2)^{\frac{2}{3}}$$

$$14.- [(x+a)x - (x-a)a][(x-a)x - (a-x)a] = x^2 + 12 - a^4$$

$$14.- x_{1,2} = \pm 2$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{-3}$$

$$15.- x^{-1/2} + x^{-1} = 110$$

$$15.- x = 0.01$$

$$16.- \frac{2}{x + \sqrt{2-x^2}} + \frac{2}{x - \sqrt{2-x^2}} = x$$

$$16.- x_1 = 0$$

$$x_2 = \sqrt{3}$$

$$x_3 = -\sqrt{3}$$

$$17.- \frac{ax + b\sqrt{x}}{ax - \sqrt{b^2x}} = \frac{\sqrt{ax} + \sqrt{bx}}{\sqrt{ax} - \sqrt{bx}}$$

$$17.- x_1 = 0$$

$$x_2 = b/a$$

$$18.- x^{2/3} - 3x^{1/3} - 10 = 0$$

$$18.- x_1 = -8$$

$$x_2 = 125$$

$$19.- x - 9x^{1/2} + 14 = 0$$

$$19.- x_1 = 4$$

$$x_2 = 49$$

$$20.- (x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$$

$$20.- x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = -2$$

$$x_4 = -3$$

$$21.- (x^2 - 2x)^2 - 11(x^2 - 2x) + 24 = 0$$

$$21.- x_1 = -1$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = 3$$

$$x_4 = 4$$

$$22.- 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$$

$$22.- x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = \frac{1}{2}$$

$$23.- \frac{3+x}{3-x} + \frac{3-x}{3+x} = \frac{10}{3}$$

$$23.- x_1 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$24.- 2(x-5) + 7\sqrt{5-x} = 4$$

$$24.- x = \frac{21}{4}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRÁTICAS. –

Se llaman sistemas cuadráticos, los sistemas de ecuaciones que contienen al menos una ecuación de segundo grado y ninguna ecuación de grado superior al segundo.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} (1) \begin{cases} 4x^2 - 3xy = 18 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} & (1) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ 2x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \end{array}$$

A continuación, resolvamos algunos sistemas cuadráticos.

EJERCICIO. –

1.-Resolver el sistema:

$$\begin{array}{l} (1) \quad 2x^2 - 3y^2 = 15 \\ (2) \quad x^2 + 2y^2 = 15 \end{array}$$

En este caso las ecuaciones del sistema contienen solamente los cuadrados de las incógnitas. Estos sistemas se resuelven como los lineales.

Comenzaremos por eliminar x^2 para lo cual hacemos: (2)2- (1)

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3y^2 = 15 \\ -2x^2 - 4y^2 = -25 \\ \hline -7y^2 = -7 \end{array}$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$\therefore y_1 = 1 \quad y_2 = -1$$

Sustituyendo y_1 en (1)

y_2 en (1)

$$2x^2 - 3 = 15$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

En Resumen

$$2x^2 - 3 = 15$$

$$x = \pm 3$$

x	3	-3	3	-3
y	1	1	-1	-1

Por lo tanto, el sistema admite las soluciones anotadas anteriormente.

2.- Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{l} (1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 1 \end{cases} \\ (2) \end{array}$$

SOL: $\begin{array}{lcl} x & 4 & -3 \\ y & -3 & 4 \end{array}$

3.- Resolver el sistema:

$$\begin{array}{l} (1) \quad \begin{cases} x^2 + 3xy = -8 \\ xy + y^2 = -4 \end{cases} \\ (2) \end{array}$$

En los sistemas de este tipo ambas ecuaciones son de segundo grado y no contienen ningún término de primer grado.

Para resolver estos sistemas se emplea uno cualquiera de los siguientes métodos.

PRIMER MÉTODO. –

Igualemos los términos independientemente, necesitamos multiplicar por 2 la ecuación (2) y tenemos que eliminar el término independiente

$$\begin{array}{l} (1) \quad \begin{cases} x^2 + 3xy = -8 \\ 2xy + 2y^2 = -8 \end{cases} \\ (3) \end{array}$$

Se resuelve por suma y resta, tratando en lo posible de obtener un trinomio factorable, si no es posible se resuelve por la fórmula con respecto a una de las incógnitas.

(1)-(3)

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 3xy & = & -8 \\ - 2xy - 2y^2 & = & 8 \\ \hline x^2 + xy - 2y^2 & = & 0 \end{array}$$

Factorando: $(x + 2y)(x - y) = 0$

Igualemos a cero cada factor: $x + 2y = 0$ $x - y = 0$

$$(4) \quad \begin{array}{lcl} x_1 = -2y & & x_2 = y \end{array} \quad (5)$$

Sustituyendo (4) en (1) tenemos:

$$(-2y)^2 + 3(-2y)y = -8$$

$$4y^2 - 6y^2 = -8$$

$$-2y^2 = -8$$

$$y^2 = 4$$

$$\therefore y = \pm 2$$

$$y_1 = 2 \Rightarrow x_1 = -4$$

$$y_2 = -2 \Rightarrow x_2 = 4$$

Sustituyendo (5) en (1) tenemos:

$$(y)^2 + 3(y)y = -8$$

$$y^2 + 3y^2 = -8$$

$$4y^2 = -8$$

$$y^2 = -2$$

$$y = \pm\sqrt{-2}$$

$$y = \pm\sqrt{2}i$$

$$y_3 = 2i \Rightarrow x_3 = \sqrt{2}i$$

$$y_4 = -2i \Rightarrow x_4 = \sqrt{-2}i$$

Por lo tanto, el sistema propuesto admite las soluciones siguientes:

$$x \quad -4 \quad 4 \quad \sqrt{2}i \quad -\sqrt{2}i$$

$$y \quad 2 \quad -2 \quad \sqrt{2}i \quad -\sqrt{2}i$$

SEGUNDO MÉTODO. –

Sustituimos y por Ax en las dos ecuaciones (1) y (2)

$$\begin{cases} (3) & x^2 + 3x(Ax) = -8 \\ (4) & x(Ax) + (Ax)^2 = -4 \end{cases}$$

$$x^2 + 3Ax^2 = -8$$

$$Ax^2 + A^2x^2 = -4$$

Dividimos las ecuaciones miembros a miembro con el objeto de eliminar x^2

$$(3) \quad \frac{x^2(1+3A)}{x^2(A+A^2)} = \frac{-8}{-4}$$

$$(4) \quad \frac{x^2(1+3A)}{x^2(A+A^2)} = \frac{-8}{-4}$$

$$\text{Entonces: } \frac{(1+3A)}{(A+A^2)} = 2$$

De donde:

$$1+3A = 2(A+A^2)$$

$$1+3A = 2A+2A^2$$

$$2A^2 - A - \frac{1}{2} = 0$$

Resolvamos la ecuación de segundo grado (por factoreo).

$$\frac{(2A-2)(2A+1)}{2} = 0$$

$$(A-1)(2A+1) = 0$$

Igualemos a cero cada factor

$$A_1 = 1 \quad A_2 = -1/2$$

Sustituimos A_1 en (3) o en (4)

$$x^2(1+3) = -8$$

$$x^2 = -8/4$$

$$x^2 = -2$$

$$x = \pm i\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{llll} x_1 = i\sqrt{2} & \text{Como } y = Ax & y_1 = 1(i\sqrt{2}) & y_1 = i\sqrt{2} \\ x_2 = -i\sqrt{2} & & y_2 = 1(-i\sqrt{2}) & y_2 = -i\sqrt{2} \end{array}$$

Sustituimos A_2 en (3) o en (4)

$$x^2(1-3/2) = -8$$

$$x^2(-1/2) = -8$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

$$\begin{array}{llll} x_3 = 4 & y_3 = (-1/2) \cdot 4 & y_3 = -2 \\ x_4 = -4 & y_4 = (-1/2)(-4) & y_4 = 2 \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{cccc} x & i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} & 4 & -4 \\ y & i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} & -2 & 2 \end{array}$$

Que son las mismas soluciones encontradas anteriormente.

4.-Resolver el sistema:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad \begin{cases} x + y = a \\ x^2 - y^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\text{SOL: } x = \frac{a^2 + b^2}{2a}; \quad y = \frac{a^2 - b^2}{2a}$$

5.- Resolver el sistema

$$\begin{cases} (1) & 4x^2 - 3xy = 18 \\ (2) & 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

Tenemos una ecuación de segundo grado y una de primer grado, por lo que procedemos a despejar una de las incógnitas de la ecuación de primer grado y este valor sustituimos en la ecuación de 2 grado

$$\text{De (2) } x: 2x = 12 - 3y$$

$$x = \frac{12 - 3y}{2} \quad (3)$$

x en (1)

$$4 = \left(\frac{12 - 3y}{2} \right)^2 - 3xy = 18$$

$$144 - 72y + 9y^2 - 3 \left(\frac{12 - 3y}{2} \right) y = 18$$

$$144 - 72y + 9y^2 - 18y + \frac{9}{2}y^2 = 18$$

$$\frac{27}{2}y^2 - 90y + 126 = 0$$

$$27y^2 - 180y + 252 = 0 \quad (\div 9)$$

84

$$3y^2 - 20y + 28 = 0$$

$$(3y - 14)(3y - 6) = 0$$

$$y_1 = \frac{14}{3}$$

$$x_1 = \frac{12 - 14}{2} = -1$$

$$y_2 = 2$$

$$x_2 = \frac{12 - 6}{2} = 3$$

x	-1	3
Y	14/3	2

Tabla. 6.1 Coordenadas

6.-Resolver el sistema:

$$\begin{cases} (1) & x^2 + xy + y^2 = 3 \\ (2) & 2x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

SOL:
$$\begin{matrix} y & 1 & -1 & 5\sqrt{7}/7 & -5\sqrt{7}/7 \\ x & 1 & -1 & -4\sqrt{7}/7 & 4\sqrt{7}/7 \end{matrix}$$

7.- Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (1) & 3x^2 - 3xy - y^2 + 8x + 7y = 4 \\ (2) & \sqrt{2x - y} = 2 \end{cases}$$

Si elevamos al cuadrado la ecuación (2), tenemos una ecuación de primer grado y una ecuación de segundo grado.

$$2x - y = 4$$

$$y = 2x - 4 \quad (3)$$

$$(3) \text{ en } (1)$$

$$3x^2 - 3x(2x - 4) - (2x - 4)^2 + 8x + 7(2x - 4) = 4$$

$$3x^2 - 6x^2 + 12x - 4x^2 + 16x - 16 + 8x + 14x - 28 = 4$$

$$-7x^2 + 50x - 48 = 0$$

$$7x^2 - 50x + 48 = 0$$

$$\frac{(7x - 42)(7x - 8)}{7} = 0$$

$$(x - 6)(7x - 8) = 0$$

$$x_1 = 6$$

$$y_1 = 12 - 4$$

$$y_1 = 8$$

$$x_2 = \frac{8}{7}$$

$$y_2 = 2\left(\frac{8}{7}\right) - 4$$

$$y_2 = -\frac{12}{7}$$

7. -Resolver el sistema:

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 65$$

$$(2) \quad x + y + z = 13$$

$$(3) \quad yz = 12$$

SOL:
$$\begin{matrix} x & 5 & 5 & 8 & 8 \\ y & 6 & 2 & \frac{24}{5 + \sqrt{23}i} & \frac{24}{5 - \sqrt{23}i} \end{matrix}$$

EJERCICIOS: RESOLVER LOS SIGUIENTES SISTEMAS. -

1. $x + y = 7$ $x^2 - y^2 = 21$

1. $x = 5$ $y = 2$

2. $x + y^2 - 2y = 15$ $3x - 2y^2 + y = 21$

2. $x_1 = 12$ $y_1 = 3$ $x_2 = 9,24$ $y_2 = -1,6$

3. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{5} = 53$ $131x^{-1}y^{-1} = 1$

3. $x^1 = \pm 12$ $y' = +11$ $x'' = +11$ $y'' = \pm 12$

4. $3x^2 + 2y^2 = 35$ $x \cdot y^{-1} = 0,25$

4. $x^1 = \pm 1$ $y' = \pm 4$

5. $x^2 - 7y^2 = \frac{x}{y} = 4$

5. $x^1 = \pm \frac{8}{3}$ $y^1 = \pm \frac{2}{3}$

6. $(3-x)(8-y) = y - x = 3$

6. $x_1 = 6$ $y_1 = 9$ $x_2 = -2$ $y_2 = 5$

7. $\frac{x+y}{x-y} = \frac{x^2-37}{y^2-23} = 6$

7. $x^1 = \pm 7$ $y^1 = \pm 5$

8. $x^2 + y^2 + x + y - 68 = 0$ $x^2 - y^2 + x - y - 44 = 0$

8. $x_1 = 7$ $y_1 = 3$ $x_2 = -8$ $y_2 = -4$

9. $x+y - \frac{0,03}{x} = 0$ $x+y - \frac{0,06}{y} = 0$

9. $x^1 = \pm 0,1$ $y^1 = \pm 0,2$

10. $3x^2 - 3xy - y^2 - y^2 + 8x + 7y = 4$ $\sqrt{2x-y} = 2$

10. $x_1 = 6$ $y_1 = 8$ $x_2 = 8/7$ $y_2 = -12/7$

11. $x(2+xy) - xy = 2$ $xy + x = 2$

11. $x_1 = 4$ $y_1 = -1/2$ $x_2 = 1$ $y_2 = 1$

12. $x^2 + y^2 + z^2 = 65$ $yz = 12$ $x + y + z = 13$

12. $x_1 = 5$ $y_1 = 6$ $z_1 = 2$ $x_2 = 5$ $y_2 = 2$ $z_2 = 6$

$$\begin{aligned} x_3 &= 8 & y_3 &= (5 + \sqrt{-23})/2 & z_3 &= (5 - \sqrt{-23})/2 \\ x_4 &= 8 & y_4 &= (5 - \sqrt{-23})/2 & z_4 &= (5 + \sqrt{-23})/2 \end{aligned}$$

$$13. (x + y)(y - z) = 9 \frac{x - y}{y + z} = \frac{3}{5} \quad y - x + 3 = 0$$

$$13. x_1 = 6 \quad y_1 = 3 \quad z_1 = 2 \quad x_2 = 1 \quad y_2 = -2 \quad z_2 = 7$$

$$14. y^2 = 2x - 5 \quad x + 2y = 1$$

$$14. x_1 = 3 \quad y_1 = -1 \quad x_2 = 7 \quad y_2 = -3$$

$$15. x^2 + xy = 35 \quad y^2 + xy = 14$$

$$15. x_1 = 5 \quad y_1 = 2 \quad x_2 = -5 \quad y_2 = -2$$

$$16. x^2 + 2xy = 24 \quad xy + y^2 = 5$$

$$16. x_1 = \pm 4 \quad y_1 = \pm 1 \quad x_2 = \pm 6; \quad y_2 = \pm 5;$$

$$17. xy - 3y^2 = -10 \quad 2x^2 + y^2 = 6$$

$$17. x_1 = \pm 1 \quad y_1 = \pm 2 \quad x_2 = \pm 4 \sqrt{38/19} \quad y_2 = \pm \sqrt{39/19}$$

$$18. x^2 + y^2 = 10 \quad x^2 + 4xy = 18$$

$$18. x_1 = \pm \sqrt{2} \quad y_1 = \pm 2 \sqrt{2} \quad x_2 = \pm 9 \sqrt{34}/17 \quad y_2 = \pm \sqrt{34}/17.$$

$$19. x^2 + y^2 = 74 \quad x - y = 2$$

$$20. 5(x - y) = 4y \quad x^2 + y^2 = 181$$

$$21. x^2 - 2xy - y^2 = 1 \quad x + y = 2$$

$$22. x^2 - 8x - y + 12 = 0 \quad x^2 + y^2 - 8x + 12 + 8y = 0$$

$$23. 36x^2 + 4y^2 - 36x - 12y - 18 = 0 \quad -4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y = 28$$

$$24. x^2 + y^2 - y = 2 \quad y = 2 + x^2$$

$$25. y = x^2 - 2x + 1 \quad x = y^2 - 6y + 7$$

CARÁCTER DE LAS RAÍCES DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. -

En algunos problemas todo lo que se necesita saber acerca de las raíces de una ecuación de 2do. Grado es su naturaleza, es decir, saber si son reales o imaginarias, racionales o irracionales, iguales o desiguales. Esta información puede obtenerse sin necesidad de resolver la ecuación. (Martínez, A., 2010)

Para esto, sabemos que las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En estas raíces el binomio $b^2 - 4ac$, que aparece bajo el signo radical; recibe el nombre de discriminante de la ecuación, como veremos enseguida, el valor de esta expresión (juntamente con la naturaleza de los coeficientes) determina el carácter de las raíces.

Supongamos que los coeficientes a, b, c son números reales; entonces puede ocurrir que.

1. si $b^2 - 4ac > 0$ puede ocurrir que:

$b^2 - 4ac =$ cuadrado perfecto, entonces x_1 y x_2 son reales racionales y desiguales.

$b^2 - 4ac \neq$ cuadrado perfecto; entonces x_1 y x_2 son reales irracionales y desiguales.

2. $b^2 - 4ac = 0$; entonces x_1 y x_2 son reales e iguales.

3. $b^2 - 4ac < 0$; entonces x_1 y x_2 son complejas.

Si, a; b; c; son números complejos, puede ocurrir que:

4. $b^2 - 4ac \neq 0$; entonces x_1 y x_2 serán números complejos desiguales.

6. $b^2 - 4ac = 0$, entonces x_1 y x_2 serán números complejos iguales.

Observamos que la anulación del discriminante, es la condición para que la ecuación tenga una raíz doble, cualquiera que sea la naturaleza de sus coeficientes.

EJERCICIO. -

1.- Determinar el carácter de las siguientes ecuaciones.

Ecuación	$b^2 - 4ac$
a. $3x^2 - 2x - 5 = 0$	$(-2)^2 - 4(3)(-5) = 4 + 60 = 64 > 0$ CP
b. $x^2 + 2x - 1 = 0$	8 no CP
c. $x^2 - 6x + 9 = 0$	$(-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$
d. $x^2 + 4x + 13 = 0$	< 0

Carácter de las raíces	valor.
a.- Reales (rationales) y desiguales	$x_1 = 2/3; x_2 = -1$
b.- Reales (irracionales) e iguales	$x_1 = -1 + \sqrt{2} \quad x_2 = -1 - \sqrt{2}$
c.- Reales (rationales) e iguales	$x_1 = x_2 = 3.$
d.- Complejas (conjugadas)	$x_1 = 2 + 3i \quad x_2 = 3 - 3i$

En la última columna hemos insertado los valores de las raíces a manera de verificación de los resultados encontrados por medio del discriminante.

EJERCICIOS: Determinar el carácter de las raíces de las siguientes ecuaciones

1	$2x^2 - 3x - 5 = 0$	1 Reales – Racionales – Desiguales
2	$x^2 - x - 20 = 0$	2 Reales – Racionales – Desiguales
3	$4x^2 + 4x + 1 = 0$	3 Reales – Racionales – Iguales
4	$x^2 - 4x - 1 = 0$	4 Reales – Irracionales – Desiguales
5	$x^2 + 2x + 2 = 0$	5 Complejas Conjugadas
6	$x^2 - 14x + 49 = 0$	6 Reales – Racionales – Iguales
7	$2x^2 - 3x + 5 = 0$	7 Complejas Conjugadas
8	$x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$	8 Reales Desiguales
9	$z^2 - z + 1 = 0$	9 Complejas Conjugadas
10	$25y^2 + 20y + 4 = 0$	10 Reales - Racionales – Iguales
11	$\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$	11 Reales Desiguales
12	$u^2 - 0.5u - 0.14 = 0$	12 Reales – Racionales – Desiguales
13	$4x^2 - 2x + 1 = 0$	13 Complejas Conjugadas
14	$4x^2 - 2 = 5x$	14 Reales Irracionales – Desiguales
15	$3z^2 + 4 = 2z$	15 Complejas Conjugadas

16	$4x^2 + 5x = 5$	16 Reales Irracionales – Desiguales
17	$9x^2 - 36 = 0$	17 Reales - Racionales – Desiguales
18	$x^2 + 7x + 7 = 0$	18 Reales Irracionales – Desiguales
19	$10x^2 - 13x + 2 = 0$	19 Reales - Irracionales – Desiguales
20	$12x^2 + 13x - 35 = 0$	20 Reales - Racionales - Desiguales
21	$x^2 + 5x - 14 = 0$	21 Reales - Racionales - Desiguales
22	$4x^2 - 12x + 9 = 0$	22 Reales- Racionales- Iguales
23	$y^2 + 10y + 29 = 0$	23 Complejas Conjugadas
24	$x^2 - 6x + 4 = 0$	24 Reales – Irracionales - Desiguales
25	$4z^2 + 2z = 3$	25 Reales - Irracionales- Desiguales
26	$x^2 + 2\sqrt{5}x - 1 = 0$	26 Reales - Desiguales

2.- Hallar el valor de **k** de manera que las raíces de la ecuación $3x^2 - 4x + k = 0$, sean iguales.

La condición para que una ecuación de segundo grado tenga sus raíces iguales es:

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow (-4)^2 - 4(3) = 0$$

$$16 - 12k = 0$$

$$k = 16/12$$

$$k = 4/3$$

Verificando: $3x^2 - 4x + 4/3 = 0$

$$9x^2 - 12x + 4 = 0$$

Resolviendo por factorización: $(3x-2)^2 = 0$

$$\therefore x_1 = x_2 = 2/3$$

3. Determinar **m** de modo que la ecuación de segundo grado $x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0$

tenga una raíz nula. SOL: $m=2$

4.- Averiguar para que valores de **k** la ecuación $x^2 - 8x + k = 0$, tiene sus raíces reales

La condición para tener raíces reales es que: $b^2 - 4ac > 0$

$$\Rightarrow (-8)^2 - 4(1)k \geq 0$$

$$64 - 4k \geq 0 \quad (\div 4)$$

$$16 \geq k$$

$$\therefore k \leq 16$$

5.- Averiguar para que valores de **k** la ecuación $x^2 + 5x + k = 0$ tiene sus raíces complejas.

SOL: $k > 25/4$

6. Determinar **k** en la ecuación $4x^2 + kx + 1 = 0$, para que las raíces sean iguales

$$x_1 = x_2.$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$k^2 - 4(4)(1) = 0$$

$$k^2 - 16 = 0$$

$$k^2 = 16$$

$$k = \pm 4.$$

7. Determinar k en la ecuación $4x^2 + kx + 1 = 0$, para que $x_1 = -x_2$.

SOL: $k = 0$

8. Determinar k en la ecuación $2x^2 + kx + 9 = 0$, para que una raíz sea el doble de la otra.
 $x = 2x_2$

$$\frac{-k + \sqrt{k^2 - 4(2)(9)}}{4} = \frac{2(-k - \sqrt{k^2 - 72})}{4}$$

$$-k + \sqrt{k^2 - 72} = -2k - 2\sqrt{k^2 - 72}$$

$$3\sqrt{k^2 - 72} = -k$$

$$9(k^2 - 72) = k^2$$

$$9k^2 - k^2 = 72 \cdot 9$$

$$8k^2 = 72 \cdot 9$$

$$k^2 = \frac{72 \cdot 9}{8}$$

$$k^2 = 9^2$$

$$k^2 = \pm 9$$

9. Determinar k en la ecuación $x^2 - 7x + k = 0$, sabiendo que sus raíces se diferencian en tres unidades. SOL: $k = 10$

10. Determinar p en la ecuación $x^2 - px + 36 = 0$; para que: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12}$

$$\frac{\frac{1}{p + \sqrt{p^2 - 144}}}{2} + \frac{\frac{1}{p - \sqrt{p^2 - 144}}}{2} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{2}{p + \sqrt{p^2 - 144}} + \frac{2}{p - \sqrt{p^2 - 144}} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{2p - 2\sqrt{p^2 - 144} + 2p + 2\sqrt{p^2 - 144}}{p^2 - (\sqrt{p^2 - 144})^2} = \frac{5}{12} \quad \frac{4p}{p^2 - p^2 + 144} = \frac{5}{12} \quad \frac{4p}{144} = \frac{5}{12}$$

$$P = 15 \quad \therefore x^2 - 15x + 36 = 0$$

Comprobación: $(x - 12)(x - 3) = 0$

$$\begin{array}{l} x_1 = 12 \\ x_2 = 3 \end{array}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{1+4}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{5}{12}$$

EJERCICIOS: Determine k, de modo que la ecuación tenga raíces iguales.

- | | |
|--------------------------|----------------------|
| 1. $x^2 - 5x + k = 0$ | 1. $\frac{25}{4}$ |
| 2. $3x^2 + 8x + k = 0$ | 2. $\frac{16}{3}$ |
| 3. $2x^2 - 6x + k = 0$ | 3. $\frac{9}{2}$ |
| 4. $25x^2 + kx + 1 = 0$ | 4. ± 10 |
| 5. $kx^2 + kx + 1 = 0$ | 5. 4 |
| 6. $kx^2 - 3x + k = 0$ | 6. $\pm \frac{3}{2}$ |
| 7. $x^2 + 3x + k = 0$ | 7. $\frac{9}{4}$ |
| 8. $2x^2 + kx + 0,5 = 0$ | 8. ± 2 |

Determinar **m** de modo que una raíz sea nula.

- | | |
|-------------------------------|-------|
| 9. $x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0$ | 9. 2 |
| 10. $3x^2 - 2x + m = 0$ | 10. 0 |

Determinar k para que las raíces sean reales.

11. $x^2 - 8x + k = 0$

11. $K < 16$.

12. $kx^2 - 6x + 5 = 0$

12. $K < 1,8$

13. $3x^2 - 6x + k = 0$

Determinar k para que las raíces sean complejas.

14. $x^2 + 5x + k = 0$

14. $k > 25/4$

15. $4x^2 + kx + 1 = 0$

15. $-4 < m < 4$

16. Determinar k en la ecuación $x^2 + kx + 12 = 0$

16. ± 8

de modo que una raíz sea el triple de la otra.

Determinar p en la ecuación $x^2 - px + 36 = 0$, de tal manera que se tenga.

17. $x_1 = x_2$

18. $x_1 = -x_2$

19. $x_1 = 5 + \sqrt{-11}$

20. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12}$

En la ecuación $(a - b)^2 x^2 + 2(a^2 - b^2)x + n = 0$, determinar **n** de tal manera que las raíces sean.

21. Iguales.

22. Inversas.

Que valores debe tomar **c** para que la ecuación $3x^2 - 10x + c$ tenga.

23. Dos raíces positivas.

24. Una raíz positiva y otra negativa.

25. Una raíz nula.

26. Dos raíces imaginarias.

27. En la ecuación $x^2 + bx + c$, determinar **b** y **c** de tal manera que la diferencia de las raíces sea 4 y la de sus cubos 208.

28. En la ecuación $x^2 + bx + c$, determinar **b** y **c** de tal manera que una de las raíces sea triple de la otra, y que la suma de sus cuadrados sea 40.

RELACIONES ENTRE LAS RAÍCES Y LOS COEFICIENTES. –

Sabemos que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ si por abreviar escribimos que $\sqrt{b^2 - 4ac} = \Delta$, las raíces de la ecuación se escribirán.

$$x_1 = \frac{-b + \Delta}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \Delta}{2a}$$

Si sumamos y multiplicamos estas expresiones tendremos:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \Delta}{2a} + \frac{-b - \Delta}{2a} = -\frac{b}{2a} + \frac{\Delta}{2a} - \frac{b}{2a} - \frac{\Delta}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \Delta}{2a} \cdot \frac{-b - \Delta}{2a} = \frac{b^2 - \Delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

La ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

Si reemplazamos los valores obtenidos, tenemos:

$$x^2 - (x_1+x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Expresando en factores:

$$(x-x_1)(x-x_2) = 0$$

Si decimos que: $S = x_1+x_2$ $\wedge$ $P = x_1 \cdot x_2$, podemos escribir:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Estas relaciones, entre las raíces y los coeficientes de una ecuación de segundo grado nos permiten.

1. Comprobar las raíces obtenidas de la ecuación dada.
2. Construir una ecuación que tenga por raíces expresiones dadas
3. Calcular dos números cuya suma sea S y producto P.

EJERCICIO

1. Verificar que $x_1 = -3$ y $x_2 = 1/2$ son raíces de la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$
Dividiendo por el coeficiente de x^2 tenemos:

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{o} \quad (x+3)(x-1/2) = 0$$

$$\text{Verificando:} \quad (x+3) \left(\frac{2x-1}{2} \right) = 0$$

$$x_1 + x_2 = -3 + 1/2 = -5/2 \quad \frac{2x^2 - x + 6x - 3}{2} = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = (-3)(1/2) = -3/2 \quad \frac{2x^2 + 5x - 3}{2} = 0$$

$$\text{Por lo que:} \quad x^2 - Sx + P = 0 \quad x^2 - (-5/2)x - 3/2 = 0$$

2. Construir la ecuación que tiene por raíces $x_1 = -2$, $x_2 = 5$. SOL: $x^2 - 3x - 10 = 0$

3. Construir la ecuación que tiene por raíces: $x_1 = 1/2 + \sqrt{5}$, $x_2 = 1/2 - \sqrt{5}$

$$S = 1/2 + \sqrt{5} + 1/2 - \sqrt{5} = 1$$

$$P = (1/2 + \sqrt{5})(1/2 - \sqrt{5}) = 1/4 - 5 = -19/4$$

$$\therefore x^2 - x - 19/4 = 0 \quad \text{ó} \quad 4x^2 - 4x - 19 = 0$$

4. Construir la ecuación que tiene por raíces: $x_1 = 3 + 2i$, $x_2 = 3 - 2i$. SOL:
 $x^2 - 6x + 13 = 0$

5. Construir la ecuación que tiene por raíces: $x_1 = p + q$, $x_2 = p - q$

$$S = p + q + p - q = 2p$$

$$P = (p + q)(p - q) = p^2 - q^2$$

$$\therefore x^2 - 2px + (p^2 - q^2) = 0$$

6. Hallar dos números cuya suma sea 36 y su producto 315. SOL: 21 y 15.

7. Una raíz de la ecuación $3x^2-11x+k=0$, es **3**. Hallar la otra raíz y determinar **k**.

La ecuación dada se puede escribir: $x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{k}{3} = 0$

Sabemos que: $x_1 + x_2 = -b/a$

$x_1 \cdot x_2 = c/a$

$$3 + x_2 = 11/3$$

$$3 \cdot x_2 = k/3$$

$$x_2 = 2/3$$

$$3 \cdot 2/3 = k/3$$

$$k = 6$$

$$\therefore x_1 = 3 \quad x_2 = 2/3 \quad k = 6$$

Ejercicio Propuesto:

8. Determinar **k** en la ecuación $x^2-5kx+2k^2=0$; sabiendo que la suma de las raíces es igual a la mitad del producto de las raíces. SOL: $k_1=0$ $k_2= 5$

CAPÍTULO VII

NÚMEROS COMPLEJOS

El término **número complejo** describe la suma de un número real y un número imaginario (que es un múltiplo real de la unidad imaginaria, que se indica con la letra **i**).

Los números complejos se utilizan en todos los campos de las matemáticas, en muchos de la física (y notoriamente en la mecánica cuántica) y en ingeniería, especialmente en la electrónica y las telecomunicaciones, por su utilidad para representar las ondas electromagnéticas y la corriente eléctrica.

En matemáticas, los números constituyen un cuerpo y, en general, se consideran como puntos del plano: el plano complejo. La propiedad más importante que caracteriza a los números complejos es el teorema fundamental del álgebra, que afirma que cualquier ecuación algebraica de grado n tiene exactamente n soluciones complejas. (Martínez, A., 2010)

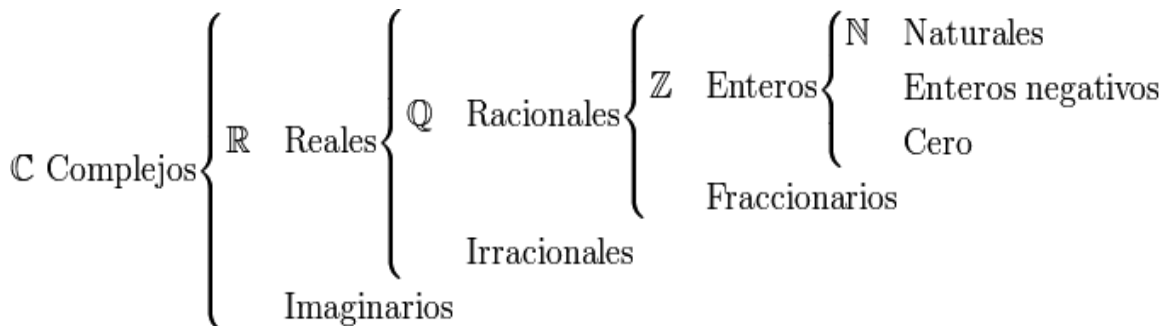


Imagen 6.1 Números Complejos

Definiciones

Los **números imaginarios** están basados en la solución de la ecuación $x^2 = -1$. Como ningún número real es la solución de esta ecuación, se define a un número imaginario i para ser la solución de esta ecuación.

Un **número imaginario** i se define como: $i = \sqrt{-1}$ y $i^2 = -1$.

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS**Suma. -**

Para sumar números complejos, se siguen las normas básicas de la aritmética, sumando los reales con los reales y los imaginarios con los imaginarios realmente transversales:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Ejemplo de la suma:

$$(4 + 3i) + (3 + 2i) = (4 + 3) + (3 + 2)i = 7 + 5i$$

Resta. -

Aunque se opera de la misma manera que en la suma hay que aclarar que se resta la parte real y la parte imaginaria por separado.

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(4 - 2i) - (3 - 2i) = (4 - 3) - ((-2) - (-2))i = 1 - 0i = 1$$

Junto con la suma y la resta, como hay 4 términos y cada uno puede tener signo + o -,

$$(a - bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Multipliación. -

Para multiplicar dos números complejos, se multiplica cada término del primero por los dos del segundo, con lo que obtenemos 4 términos:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Obsérvese que el término bdi^2 pasa a ser $-bd$. Eso es porque $i^2 = -1$. Ejemplo:

$$(4+2i)(3+2i) = 4\cdot3+4\cdot2i+2\cdot3i+2\cdot2i^2 = (4\cdot3-2\cdot2)+(4\cdot2+2\cdot3)i = 8+14i$$

División. -

La división de números complejos requiere un mayor trabajo que la multiplicación y partimos de un artificio previo, basado en que el producto de un número complejo por su conjugado da como resultado un número real:

$$(a + bi) * (a - bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2$$

si la división de dos números complejos, la multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac-adi+bci+bd}{c^2-cdi+cdi+d^2} =$$

$$= \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

- DESIGUALDADES

Se denomina desigualdad a toda expresión que describe la relación entre al menos 2 elementos escritos en términos matemáticos que incluyen al menos un símbolo de los siguientes:

< Menor que

> Mayor que

≤ Menor o igual que

≥ Mayor o igual que

- INECUACIONES

Se llama Inecuación a toda desigualdad que incluye al menos una variable en su descripción

Sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita. Se resuelven por separado las inecuaciones y se toman como soluciones los intervalos comunes de las soluciones

$$5x - 3x < -8 - 62x < -14$$

$$x < -7$$

Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $3x - 1 < -2x + 4$

b) $-x + 6 > 3x - 2$

CAPÍTULO VIII

GEOMETRÍA PLANA

LÍNEAS, PUNTO, PLANO, RECTA, RAYO, SEGMENTO, VECTOR.

Punto, recta y plano son los conceptos básicos de la geometría. Todo intento para representar físicamente estos conceptos son solamente una aproximación.

Estos tres términos son no definidos; sin embargo, podemos sugerir la idea intuitiva de cada uno de ellos.

La marca hecha por la punta de un lápiz afilado sobre un papel nos da la idea de un punto. Los puntos los denotaremos mediante letras mayúsculas: A, B, C, D. (Sánchez, R. , 2012)

Puntos colineales, están ubicados siguiendo una misma dirección.

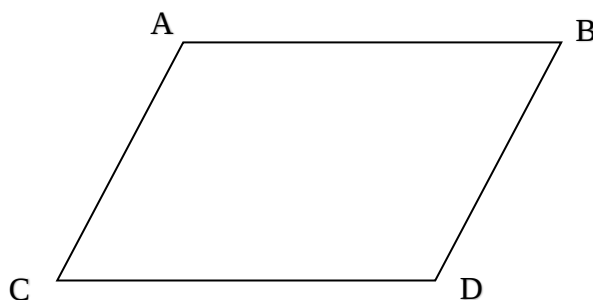


Gráfico 8.1 Cuadrilátero

Un hilo tenso da la idea de una recta. Una recta se extiende indefinidamente en ambos sentidos. Las rectas se denotan por letras minúsculas: r, s, t, u...

Una hoja de papel extendida nos da la idea de un plano. Un plano se extiende indefinidamente en todas las direcciones. Los planos se denotan por letras góticas tales como: K, I, R, etc.

Axiomas fundamentales del punto y la recta:

1. Existen infinitos puntos.
2. Una recta es un conjunto infinito de puntos.
3. Por un punto pasan infinitas rectas.
4. Por dos puntos solo pasa una línea recta.

SEMIRRECTA (rayo): Es el conjunto de puntos alineados que tiene un elemento inicial llamado origen y se prolonga al infinito.



Gráfico 8.2 Semirecta

SEGMENTO: Es el conjunto de puntos alineados que tiene un primero y un último elemento (representados con letras mayúsculas, con una raya encima: segmento $\overline{PQ}$)

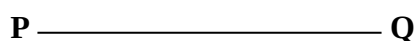


Gráfico 8.3 Segmento

SEGMENTO DIRIGIDO: Tiene un sentido determinado por una punta de flecha.

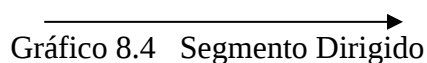


Gráfico 8.4 Segmento Dirigido

POSICIONES DE SEGMENTOS:

Horizontales:



Verticales:



Oblicuos (inclinados):

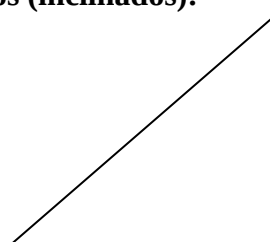


Gráfico 8.5 Posiciones de Segmentos

RELACIONES ENTRE SEGMENTOS:

Paralelos, si no se cortan nunca, por mucho que los prolonguemos; no tienen ningún punto en común. Dos segmentos paralelos tienen la misma dirección.

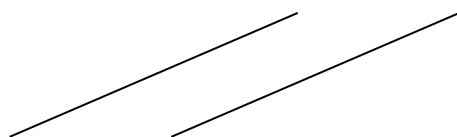


Gráfico 8.6 Relación entre Segmentos

Coincidentes, si además de ser paralelos tienen todos sus puntos en común; se trata del mismo segmento.



Gráfico 8.7 Recta

Secantes, si se cortan en un punto. Dos segmentos secantes tienen diferentes direcciones.

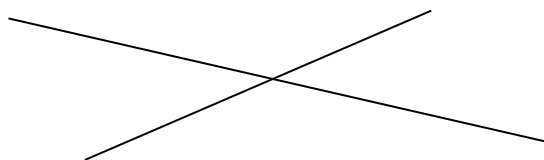
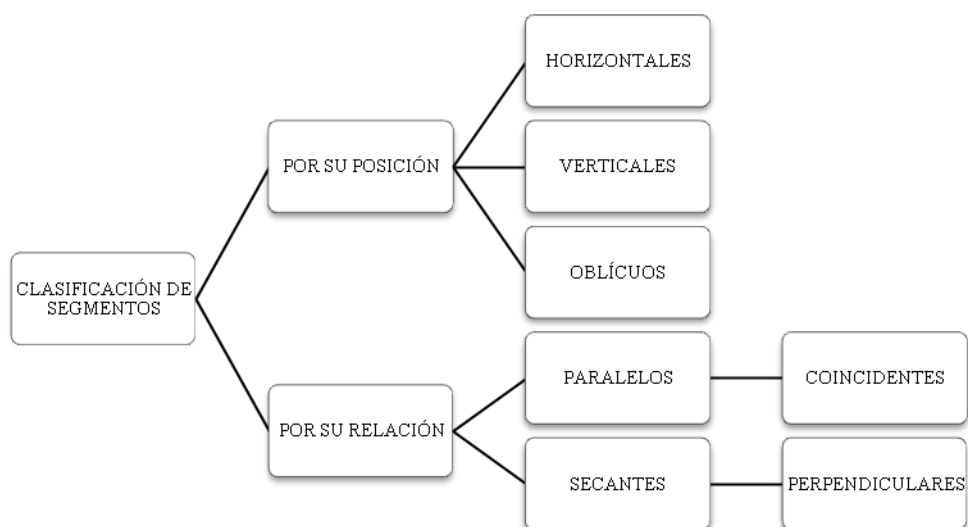


Gráfico 8.8 Secantes

Perpendiculares, si además de ser secantes, se cortan formando cuatro ángulos rectos (de 90°). Dos segmentos perpendiculares tienen diferentes direcciones.



Gráfico 8.9 Perpendicular



Esquema 8.1 Clasificación de Segmentos

VECTOR: Es un segmento dirigido que representa magnitudes vectoriales, como: la fuerza, la velocidad, la aceleración... para su completa determinación debe tener:

Módulo o magnitud: Tamaño del segmento dirigido.

Dirección: Ángulo de inclinación, respecto de la horizontal.

Sentido: Punta de flecha que dirige al segmento, que señala uno de los dos sentidos que puede tener una dirección. (Sánchez, R. , 2012)

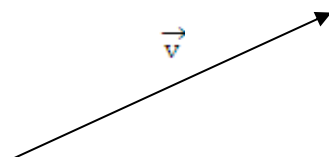


Gráfico 8.10 Vector

ÁNGULOS

Definición de ángulo (Sánchez, R. , 2012)

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común.

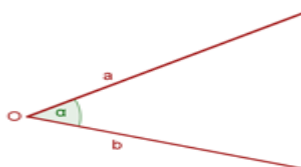


Gráfico 8.11 Ángulo

Elementos de un ángulo

A las semirrectas se las llama lados y al origen común vértice.

Notación. - A un ángulo, se le denota con los siguientes símbolos:

Medida de ángulos

Para medir ángulos utilizamos el grado sexagesimal (°)

Grado sexagesimal es la amplitud del ángulo resultante de dividir la circunferencia en 360 partes iguales.

$$1^{\circ} = 60' = 3600''$$

$$1' = 60''$$

Clasificación de ángulos

Clasificación de ángulos según su medida

Ángulo agudo



Gráfico 8.12 Ángulo Agudo

El ángulo agudo mide menos de 90° .

Ángulo recto



Gráfico 8.13 Ángulo Recto

El ángulo recto mide 90° .

Ángulo obtuso



Gráfico 8.14 Ángulo Obtuso

El ángulo obtuso mide más de 90° .

Ángulo llano



Gráfico 8.15 Ángulo Llano

El ángulo llano mide 180° .

Ángulo convexo



Gráfico 8.16 Ángulo Convexo

El ángulo convexo mide menos que un ángulo llano.

Ángulo cóncavo

Gráfico 8.17 Ángulo Cóncavo

El ángulo cóncavo mide más que un ángulo llano.

Ángulo nulo

Gráfico 8.18 Ángulo Nulo

El ángulo nulo mide 0° . Las semirrectas que forman los ángulos coinciden.

Ángulo completo

Gráfico 8.19 Ángulo Completo

El ángulo completo mide 360° .

Ángulo negativo

Gráfico 8.20 Ángulo Negativo

El ángulo negativo mide menos de 0° .

Los ángulos negativos giran en el sentido horario, es decir, en el sentido en que se mueven las agujas de un reloj.

Un ángulo negativo lo podemos transformar en un ángulo positivo sumándole 360° .

$$-30^\circ = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS SEGÚN SU POSICIÓN

Ángulos consecutivos

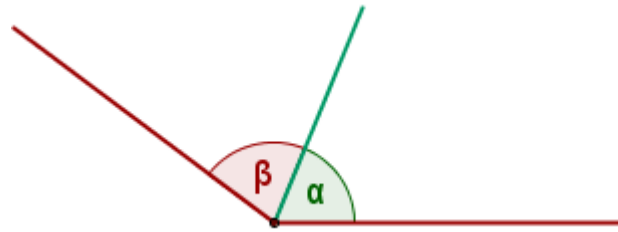


Gráfico 8.21 Ángulo Consecutivo

Ángulos consecutivos son aquellos que tienen el vértice y un lado común.

Ángulos adyacentes

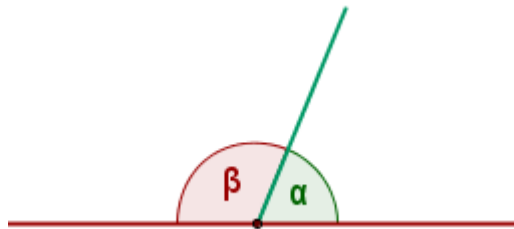


Gráfico 8.22 Ángulo Adyacente

Ángulos adyacentes son aquellos que tienen el vértice y un lado común, y los otros lados situados uno en prolongación del otro. Forman un ángulo llano. (Sánchez, R. , 2012)

Ángulos opuestos por el vértice

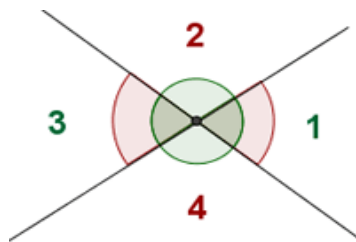


Gráfico 8.23 Ángulo Opuestos por el Vértice

Son los que, teniendo el vértice común, los lados de uno son prolongación de los lados del otro.

Los ángulos 1 y 3 son iguales. Los ángulos 2 y 4 son iguales.

Clasificación de ángulos según su suma

Ángulos complementarios

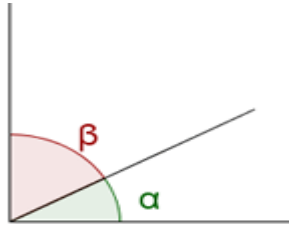


Gráfico 8.24 Ángulos Complementarios

Dos ángulos son complementarios si suman 90° .

Ángulos suplementarios

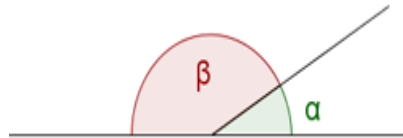


Gráfico 8.25 Ángulo Suplementarios

Dos ángulos son suplementarios si suman 180° .

Ángulos entre paralelas y una recta transversal

Ángulos correspondientes

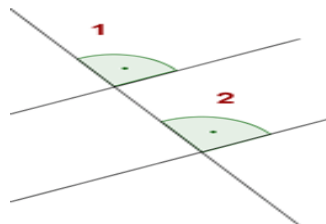


Gráfico 8.26 Ángulos Correspondientes

Los ángulos 1 y 2 son iguales.

Ángulos alternos internos

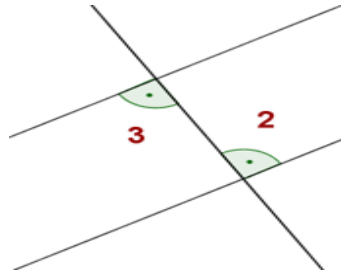


Gráfico 8.27 Ángulos Alternos Internos

Los ángulos 2 y 3 son iguales.

Ángulos alternos externos

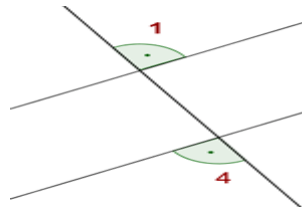


Gráfico 8.28 Ángulos Externos

Los ángulos 1 y 4 son iguales.

TALLER

a.- Utilizando un graduador dibuje los siguientes ángulos:

Agudo

Obtuso

Recto

Suplementarios

Complementarios.

b.- Responda lo siguiente:

Principio del formulario

Final del formulario

Principio del formulario

1.- Un ángulo agudo puede medir

Menos de 90° : ☐ Más de 90° : ☐ Más de 180° : ☐

Final del formulario

Principio del formulario

2.- Un ángulo cuya medida es 90° se llama...

Llano: ☐ Recto: ☐

Final del formulario

Principio del formulario

Final del formulario

Principio del formulario

3.- El complemento de 30° es

60° : ☐ 150° : ☐

Principio del formulario

4.- El suplemento de 40° es

140° : ☐ 60° : ☐

5.- Una propiedad de los ángulos adyacentes es que también son:

- ☐ Suplementarios
- ☐ Complementarios
- ☐ Opuestos por el vértice
- ☐ Perpendiculares

Alternos internos

Final del formulario

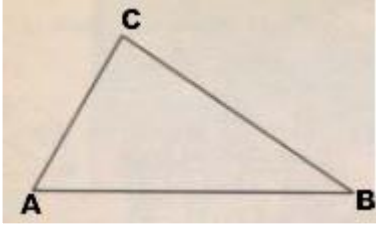
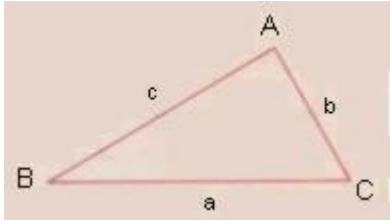
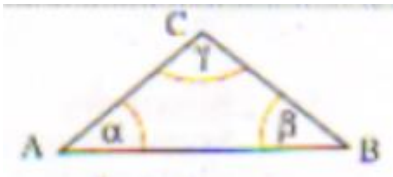
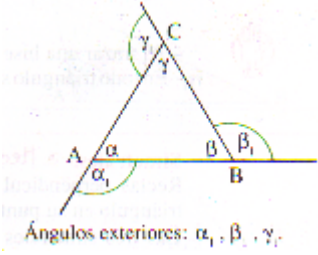
Principio del formulario

Principio del formulario

TRIÁNGULOS

Definición

Es un polígono de tres lados, es decir, una porción de plano limitada por tres segmentos unidos, dos a dos, por sus extremos. Los tres segmentos que limitan el triángulo se denominan lados, y los extremos de los lados, vértices. (Sánchez, R. , 2012)

Vértices Son los puntos de origen de los segmentos. Se nombran con tetras mayúsculas: A, B, C ... Z.	
Lados Son los segmentos de la poligonal. Se designan por las dos letras de sus extremos coronadas por un pequeño trazo: — — — — — AB, BC, CA, ... XY, YZ o por una letra minúscula (a, b, c) que corresponde a la letra que nombra el vértice opuesto (A, B, C).	
Ángulos interiores Son aquellos formados por cada par de lados consecutivos del triángulo. Se denominan por las tres letras mayúsculas de los vértices o por una letra griega ubicada entre los lados del ángulo.	
Ángulos exteriores Son los ángulos formados por un lado del triángulo y la prolongación de otro hacia la región exterior. Se nombran generalmente por la letra del ángulo interior adyacente con un subíndice.	 Ángulos exteriores: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.

Cuadro 8.1 Elementos primarios de un triángulo

Clasificación de los triángulos

Por la longitud de sus lados se clasifican en:

Triángulo equilátero: si sus tres lados tienen la misma longitud (los tres ángulos internos miden 60 grados).

Triángulo isósceles: si tiene dos lados de la misma longitud. Los ángulos que se oponen a estos lados tienen la misma medida.

Triángulo escaleno: si todos sus lados tienen longitudes diferentes. En un triángulo escaleno no hay ángulos con la misma medida. (Sánchez, R. , 2012)

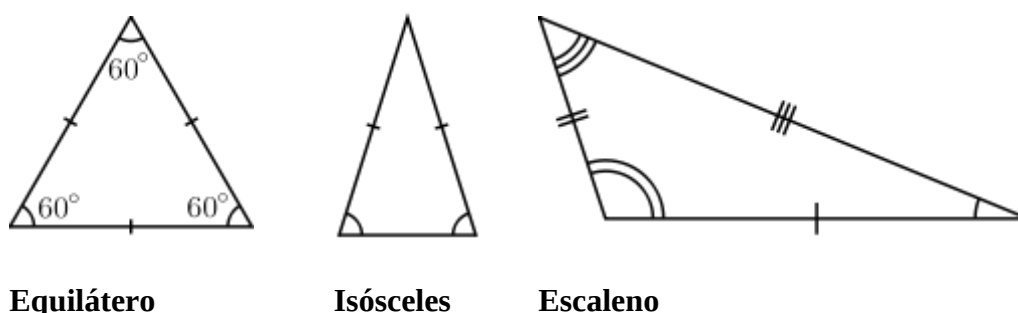


Gráfico 8.29 Clasificación de los Triángulos por la longitud de sus lados

Por la amplitud de sus ángulos:

Triángulo rectángulo: si tiene un ángulo interior recto (90°). A los dos lados que conforman el ángulo recto se les denomina catetos y al otro lado hipotenusa.

Triángulo oblicuángulo: cuando no tiene un ángulo interior recto (90°).

Triángulo obtusángulo: si uno de sus ángulos es obtuso (mayor de 90°); los otros dos son agudos (menor de 90°).

Triángulo acutángulo: cuando sus tres ángulos son menores a 90° ; el triángulo equilátero es un caso particular de triángulo acutángulo.

Triángulo equiángulo: suele llamarse Triángulo equilátero clasificándolo según sus lados, puesto que, si sus lados son iguales, sus ángulos también lo serán, y medirán 60° . (Sánchez, R. , 2012)

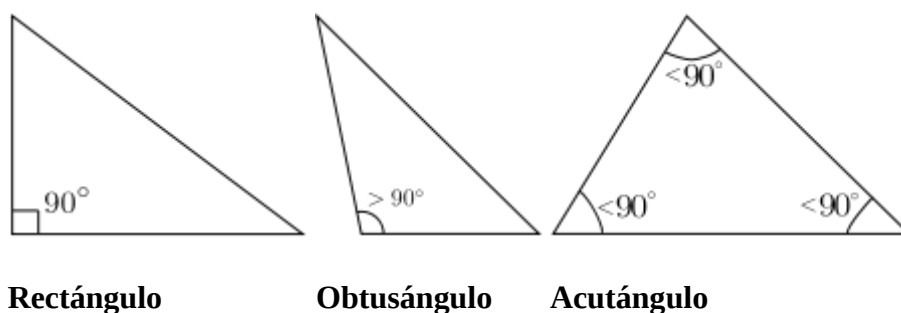


Gráfico 8.29 Clasificación de los Triángulos por la amplitud de sus ángulos

Además, tienen estas denominaciones y características:

Los triángulos acutángulos pueden ser:

Triángulo acutángulo isósceles: con todos los ángulos agudos, siendo dos iguales, y el otro distinto, este triángulo es simétrico respecto de su altura diferente.

Triángulo acutángulo escaleno: con todos sus ángulos agudos y todos diferentes, no tiene ejes de simetría.

Los triángulos rectángulos pueden ser:

Triángulo rectángulo isósceles: con un ángulo recto y dos agudos iguales (de 45° cada uno), dos lados son iguales y el otro diferente, naturalmente los lados iguales son los catetos, y el diferente es la hipotenusa, es simétrico respecto a la altura que pasa por el ángulo recto hasta la hipotenusa.

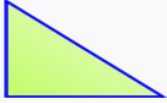
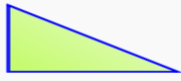
Triángulo rectángulo escaleno: tiene un ángulo recto y todos sus lados y ángulos son diferentes.

Los triángulos obtusángulos son:

Triángulo obtusángulo isósceles: tiene un ángulo obtuso, y dos lados iguales que son los que parten del ángulo obtuso, el otro lado es mayor que estos dos.

Triángulo obtusángulo escaleno: tiene un ángulo obtuso y todos sus lados son diferentes.

(Sánchez, R. , 2012)

Triángulo	equilátero	isósceles	escaleno
acutángulo			
rectángulo			
obtusángulo			

Cuadro 8.2 Clasificación de los Triángulos

TALLER

a.- Dibuja los siguientes triángulos:

- * Rectángulo
- * Isósceles
- * Equilátero
- * Escaleno

b.- Marca, con una x, la alternativa que consideres correcta.

1.- Un triángulo equilátero tiene:

- ☐ Dos ángulos distintos
- ☐ Un ángulo recto

- ☐ Sólo dos lados iguales
- ☐ Sus tres ángulos iguales
- ☐ Sus tres lados desiguales

2.- Un triángulo equilátero es también un triángulo:

- ☐ Escaleno
- ☐ Acutángulo
- ☐ Obtusángulo
- ☐ Rectángulo

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

En general dos figuras geométricas son semejantes si tienen la misma forma, pero diferente medida o extensión; y los lados paralelos u homólogos proporcionales. (Sánchez, R. , 2012)

La determinación de semejanza de dos triángulos es análoga a la igualdad.

La palabra semejante se remplaza con el signo $\approx$

TEOREMA. -

Enunciado. - “Dos triángulos son semejantes cuando un ángulo del uno es igual a un ángulo del otro y los lados homólogos que lo forman son respectivamente proporcionales”. (L.A.L.) (Lado, ángulo, lado)

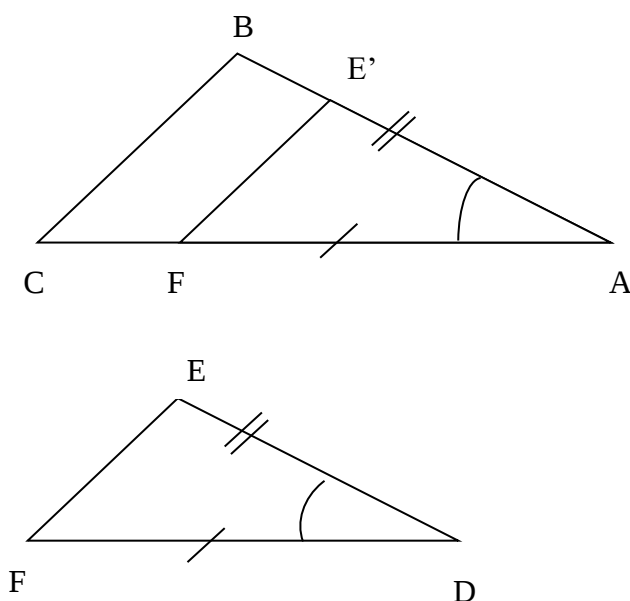


Gráfico 8.30 Semejanza de Triángulos

En AC del triángulo ABC trasladamos FD por lo que $AF = DF$; por F trazamos EF paralela a BC

En los triángulos ABC y DEF, vemos:

$$m(\angle A) = m(\angle D) \text{ y } DF / AC = DE / AB$$

$$\text{Triángulo DEF} \approx \text{Triángulo ABC}$$

TEOREMA.

Enunciado. –

“Dos triángulos son semejantes, cuando dos ángulos del uno son iguales a los dos ángulos homólogos del otro y el lado adyacente, proporcional”.

(A.L.A.) (Ángulo, lado, ángulo)

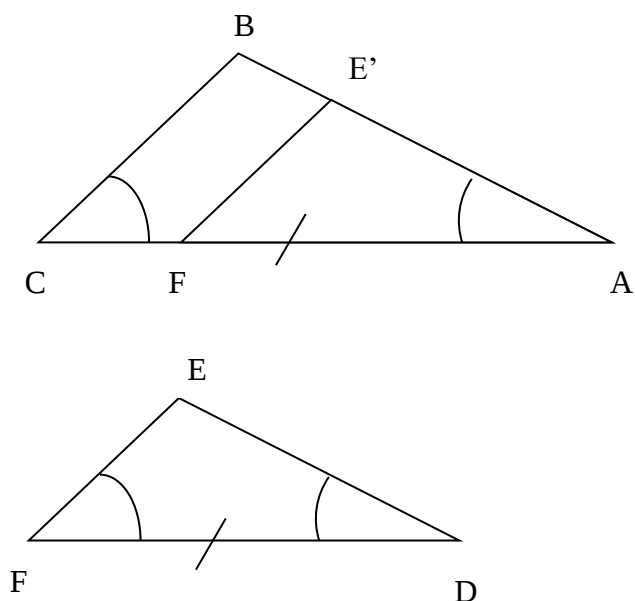


Gráfico 8.31 Semejanza de Triángulos ángulo, lado, ángulo

$$m(\angle A) = m(\angle D)$$

$$m(\angle F) = m(\angle C) \text{ y } AC / DF$$

$$\text{Luego Triángulo ABC} \approx \text{Triángulo DEF}$$

TEOREMA:

Enunciado. - “Dos triángulos son semejantes cuando los tres lados del uno son respectivamente proporcionales con los tres lados del otro” (L.L.L.) (lado, lado, lado)

$$m(\angle A) = m(\angle D) \ ; \ m(\angle B) = m(\angle E) \ \text{y} \ m(\angle C) = m(\angle F).$$

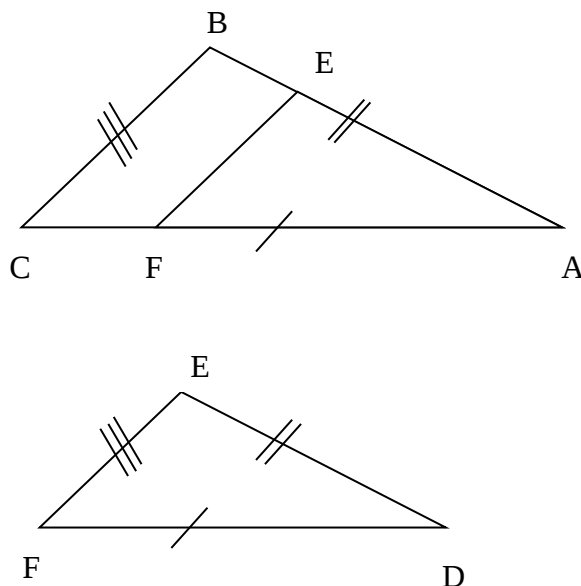


Gráfico 8.32 Semejanza de Triángulos de lados proporcionales

$$FD / AC = DE / AB = EF / BC \text{ entonces:}$$

$$\text{Triángulo ABC} \approx \text{Triángulo EDF}$$

APLICACIÓN PRÁCTICA:

Dado un triángulo ABC, construir otro triángulo semejante a él según una razón determinada.

Aplicación:

La razón es 2/3

Solución:

Se divide un lado cualquiera del triángulo dado en tantas partes cuántas indique el denominador de la razón (3) .

Por ejemplo, en AC

Se toman en este lado tantas partes cuántas indique el numerador (2).

Desde el extremo de la última parte E se traza la paralela (ED) al lado (A) del triángulo.

El triángulo DEC es semejante al triángulo ABC o igual a los 2/3 del mismo.

Hallar las dimensiones de los lados de un triángulo conociendo los tres lados de su semejante.

Ejemplo:

Sea el triángulo ABC cuyas medidas se indican en la figura, hallar las medidas del triángulo

DEB, si la razón es $\frac{3}{4}$

Solución:

Se establecen las proporciones con cada uno de los lados homólogos según la razón dada.

$$AC = 60 \text{ cm.}$$

$$AE = 80 \text{ cm.}$$

$$CD = 70 \text{ cm.}$$

Se resuelve la proporción para la incógnita:

$$BD / DC = 3 / 4 \quad BD / 70 = 3 / 4; \text{ luego:}$$

$$BD = 70 \times 3 / 4 \quad BD = 52.5 \text{ cm.}$$

$$BE / AE = 3 / 4 \quad BE / 80 = 3 / 4; \text{ luego:}$$

$$BE = 80 \times 3 / 4 \quad BE = 60 \text{ cm.}$$

$$DE / AC = 3 / 4 \quad DE / 60 = 3 / 4 \text{ luego:}$$

$$DE = 60 \times 3 / 4 \quad DE = 45 \text{ cm.}$$

CAPÍTULO XI**TRIGONOMETRÍA****UNIDAD DEL ÁNGULO PLANO: EL RADIÁN, TRANSFORMACIONES**

Las unidades más conocidas son:

Sistema Sexagesimal**Grados. -**

Unidad angular que divide una circunferencia en 360 sectores radiales.

La unidad se escribe 1° .

Cada grado se divide en 60 minutos (') y cada minuto en 60 segundos ("), o lo es lo mismo, $1^\circ = 60'$ y $1' = 60''$.

Sistema Circular**Radián. -**

Unidad angular que ve desde el centro de una circunferencia una cuerda de longitud igual al radio.

La unidad se escribe 1 rad.

Una vuelta entera a la circunferencia son 2π rad. (Torres, L., 2017)

TRANSFORMACIONES:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radián}$$

$$1 \text{ radián} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Ejemplos:

Transformar de grados y minutos a grados

$$57^{\circ} 20'$$

$$20' = \frac{1^{\circ}}{60'} = 0.333^{\circ}$$

$$57^{\circ} + 0.333^{\circ} = 57.333^{\circ} \text{ R.}$$

Transformar de grados a grados y minutos

$$38.59^{\circ}$$

$$0.59^{\circ} = \frac{60'}{1^{\circ}} = 35.4'$$

$$38^{\circ} 35.4' \text{ R.}$$

Transformar de grados a radianes.

18° a radianes

$$18^{\circ} = \frac{\frac{\pi}{180} \text{ radián}}{1^{\circ}} = 0.3141 \text{ radianes} \text{ R.}$$

Transformar de radianes a grados.

0.875 radianes a °

$$0.875 \text{ radianes} = \frac{180^{\circ}/\pi}{1 \text{ radián}} = 50.134^{\circ} \text{ R.}$$

TALLER EN

Transformar de grados y minutos a grados

$$145^{\circ} 20'$$

$$275^{\circ} 30'$$

Transformar de grados a grados y minutos

$$235.86^{\circ}$$

$$145.10^{\circ}$$

Transformar de grados a radianes.

243.30°

145.10°

Transformar de radianes a grados.

1.5 radianes

0.01745 radianes

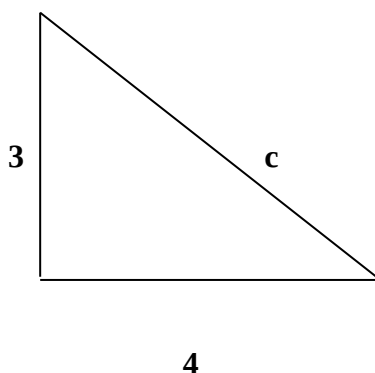
- TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos. $c^2 = a^2 + b^2$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Aplicaciones. -

a) Si los dos catetos miden 4 y 3 respectivamente, determinar la hipotenusa



$$a^2 + b^2 = c^2$$

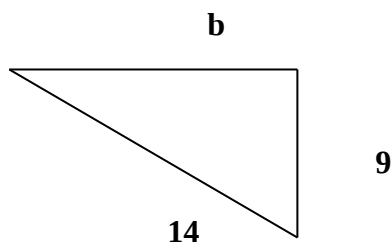
$$4^2 + 3^2 = c^2, \text{ entonces:}$$

$$c^2 = 16 + 9; \text{ luego}$$

$$c = , \text{ entonces } c = 5$$

Gráfico 9.1 Cálculo de la Hipotenusa

b) Si en el triángulo de la figura uno de los catetos tiene de medida 9 cm y la hipotenusa mide 14cm. Determinar la medida del otro cateto.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + b^2 = 14^2 \text{ entonces:}$$

$$b^2 = 14^2 - 9^2$$

$$b^2 = 196 - 81$$

$$b = 10.72 \text{ cm}$$

Gráfico 9.2 Cálculo del otro cateto

TAREA

1.- Dibuje un triángulo que tiene por lados 6cm, 8cm,10cm y compruebe gráficamente el teorema de Pitágoras.

4.-Grafique en el plano cartesiano los siguientes puntos y encuentre tres triángulos rectángulos

A (-1,2) B (2,-1) C (-3,-5) D (2,3) E (5,-2) F (-3,0) G (0,-8) H (6,-8), I (0,6)

5.-Compruebe con el teorema de Pitágoras que el siguiente es un triángulo rectángulo

A(-1,2) B(2,-1) C (-2,-5)

6. - Utilizando el teorema de Pitágoras, resolver los triángulos rectángulos:

a) $a=5$, $b=8$ $c=?$ b) $a=3$, $c=9$ $b=?$ c) $b=7$, $c=11$ $a=?$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS NATURALES DE UN ÁNGULO AGUDO EN UN TRIANGULO RECTÁNGULO.

Sea el triángulo rectángulo ACB, con el ángulo recto en C. Designemos por las letras mayúsculas A, B, C las medidas de los ángulos y por las letras minúsculas a, b, c las longitudes de los lados opuestos correspondientes en el triángulo rectángulo. (Torres, L., 2017)

Sea A un ángulo menor de 90° , es decir, un ángulo agudo.

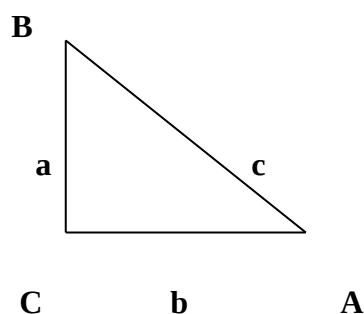


Gráfico 9.3 Triángulo rectángulo

Sabemos, por Geometría, que los lados y ángulos de este triángulo son mutuamente dependientes.

La Trigonometría comienza por enseñar la naturaleza exacta de esta dependencia, y para este objeto emplea las razones de los lados. Estas razones se llaman funciones trigonométricas.

Las seis funciones trigonométricas de cualquier ángulo agudo, como A en la figura, se designan como sigue:

$$\text{Seno de A, que se escribe sen A} = \frac{\text{c.opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Coseno de A, que se escribe cos A} = \frac{\text{c.adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tangente de A, que se escribe tg A} = \frac{\text{c.opuesto}}{\text{c.adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Cotangente de A, que se escribe ctg A} = \frac{\text{c.adyacente}}{\text{c.opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Secante de A, que se escribe sec A} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{c.adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{Cosecante de A, que se escribe csc A} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{c.opuesto}} = \frac{c}{a}$$

Ejemplo:

Calcular las funciones trigonométricas del ángulo B en el triángulo rectángulo ACB en el que: $a = 3$, y $c = 6$

Solución: Por Pitágoras $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$, entonces

$$\text{Sen B} = \frac{\sqrt{27}}{6}$$

$$\text{Cos B} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tg B} = \frac{\sqrt{27}}{3}$$

$$\text{Ctg B} = \frac{3}{\sqrt{27}} = \frac{3\sqrt{27}}{27} = \frac{\sqrt{27}}{9}$$

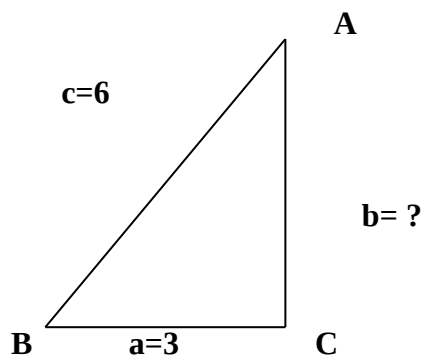


Gráfico 9.4 Cálculo del Teorema de Pitágoras

$$\text{Sec B} = \frac{6}{3}$$

$$\text{Csc B} = \frac{6}{\sqrt{27}} = \frac{6\sqrt{27}}{27} = \frac{2\sqrt{27}}{9}$$

Si calculamos $\text{sen A} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ observamos que es igual a cos B . Encontrando las otras funciones trigonométricas del ángulo A podemos concluir que:

$$\text{sen A} = \text{cos B}$$

$$\text{cos A} = \text{sen B}$$

$$\text{tg A} = \text{ctg B}$$

$$\text{ctg A} = \text{tg B}$$

$$\text{sec A} = \text{csc B}$$

$$\text{csc A} = \text{sec B}$$

En este caso el seno y el coseno se llaman cofunciones, de igual manera, la tangente y cotangente, la secante y cosecante. Como los ángulos A y B suman 90° , generalizando se puede establecer que "una función trigonométrica de un ángulo agudo es igual a la cofunción de su ángulo complementario".

Con el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas conocidas estamos en condiciones de resolver un triángulo rectángulo, es decir de poder encontrar los lados o ángulos agudos desconocidos, dados dos elementos de este triángulo (se supone conocido el ángulo $C = 90^\circ$).

Ejemplo:

Resolver un triángulo rectángulo si se conocen: los lados

$$a = 15, b = 12$$

Para encontrar el valor del ángulo "A" aplicamos la función tangente, así:

$$\text{tg A} = \frac{12}{16} = 0,8, \text{ despejando A se tiene}$$

$$A = \text{Tg}^{-1}(0,8) = \text{arc tg}(0,8).$$

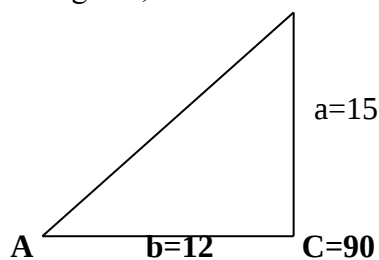


Gráfico 9.5 Cálculo del Valor del Ángulo A

En cualquiera de las formas anteriores que se escriba el valor del ángulo A, este está consignado en las tablas de las funciones trigonométricas o mejor en las calculadoras, teniendo el cuidado de que dicho valor se determine en grados Sexagesimales (DEG en las calculadoras). En este caso se tiene que:

$$A = 38,65980828^\circ = 38^\circ 39' 35,3''.$$

TALLER

1.- Calcular el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo ACB, conociendo:

(a) $a=9$, $b=3$

Solución: El valor de las funciones trigonométricas del ángulo A son: $\text{Sen}=3/\sqrt{10}$, $\text{Cos}=\sqrt{10}/10$, $\text{Tg}=3$, $\text{Ctg}=1/3$, $\text{Sec}=\sqrt{10}/10$, $\text{Csc}=\sqrt{10}/3$;

Del ángulo B son: $\text{Sen}=1/\sqrt{10}$, $\text{Cos}=3/\sqrt{10}$, $\text{Tg}=1/3$, $\text{Ctg}=3$, $\text{Sec}=\sqrt{10}/3$, $\text{Csc}=\sqrt{10}$

(b) $a=2$, $c=5$

Solución: A: $\text{Sen}=2/5$, $\text{Cos}=\sqrt{21}/5$, $\text{Tg}=2/\sqrt{21}$, $\text{Ctg}=\sqrt{21}/2$, $\text{Sec}=5/\sqrt{21}$, $\text{Csc}=5/2$.

B: $\text{Sen}=\sqrt{21}/5$, $\text{Cos}=2/5$, $\text{Tg}=\sqrt{21}/2$, $\text{Ctg}=2/\sqrt{21}$, $\text{Sec}=5/2$, $\text{Csc}=5/\sqrt{21}$

(c) $b=$, $c=4$

Solución: A: $\text{Sen}=3/4$, $\text{Cos}=\sqrt{7}/4$, $\text{Tg}=3/\sqrt{7}$, $\text{Ctg}=\sqrt{7}/3$, $\text{Sec}=4/\sqrt{7}$, $\text{Csc}=4/3$.

B: $\text{Sen}=\sqrt{7}/4$, $\text{Cos}=3/4$, $\text{Tg}=\sqrt{7}/3$, $\text{Ctg}=3/\sqrt{7}$, $\text{Sec}=4/3$, $\text{Csc}=4/\sqrt{7}$

2.- Un árbol quebrado por el viento forma un triángulo rectángulo con respecto al suelo. Si la parte quebrada forma un ángulo de 30° con el suelo y, la copa del árbol se encuentra ahora a 6 m de su base, ¿qué altura tenía el árbol?

Sol. 10,39 m.

3.- Un conductor viaja 50 m a lo largo de una vía que tiene una inclinación de 10° hacia arriba con respecto a la horizontal. ¿A qué altura se encuentra sobre su punto de partida?

Sol. 26,05 m.

4.- ¿Cuál es el perímetro de un triángulo isósceles de 40 cm de base y cuyos ángulos de base son de 70° ?

Sol. 156,95 cm.

SIGNOS ALGEBRAICOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Signos Algebraicos de las Funciones Trigonométricas.

En el I Cuadrante todas las funciones son Positivas.

En el II Cuadrante el seno y cosecante son Positivas, las restantes son negativas.

En el III Cuadrante la tangente y cotangente son Positivas, las restantes son negativas.

En el IV Cuadrante el coseno y la secante son Positivas, las restantes son negativas.

(Torres, L., 2017)

En resumen, podemos elaborar el siguiente cuadro:

	Sen	cos	tg	ctg	sec	cosec
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Tabla 9.1 Signos algebraicos de las funciones trigonométricas

USO DE LA CALCULADORA

Para sacar el seno de una cantidad en la calculadora se encuentra la abreviatura sin.

Para el coseno la abreviatura con.

Para la tangente la abreviatura tan.

La cotangente es el inverso de la tangente.

La secante es el inverso del coseno

La cosecante es el inverso del seno.

Ejemplos:

$\text{sen } 195^\circ$

Presionamos sin ponemos la cantidad de 195 y el resultado es -0.25881.

Como podemos darnos cuenta en la tabla el signo del seno en el tercer cuadrante es negativo.

$\text{tg } 195^\circ$

Presionamos tan ponemos la cantidad de 195 y el resultado es 0.2679.

Como podemos darnos cuenta en la tabla el signo de la tangente en el tercer cuadrante es positivo.

$\text{cosec } 280^\circ$

Como la cosecante es el inverso del seno presionamos 1/sin ponemos la cantidad de 280 y el resultado es -1.0154.

Como podemos darnos cuenta en la tabla el signo de la cosecante en el cuarto cuadrante es negativo.

TALLER

Sin usar la calculadora poner el signo de la respuesta

$\text{sen } 52^\circ$

$\text{cos } 295^\circ$

$\text{sec } 200^\circ$

$\text{ctg } 110^\circ$

$\text{tg } 198^\circ$

$\operatorname{cosec} 87^\circ$

Usando la calculadora encontrar el valor de los siguientes valores.

$\operatorname{sen} 100^\circ$

$\cos 250^\circ$

$\operatorname{tg} 300^\circ$

$\operatorname{ctg} 235^\circ$

$\sec 20^\circ$

$\operatorname{cosec} 355^\circ$

VALORES DE LOS ÁNGULOS DE 30,45 Y 60 GRADOS

Funciones del ángulo de 45° . -

Consideremos en triángulo rectángulo isósceles, como ABC, entonces:

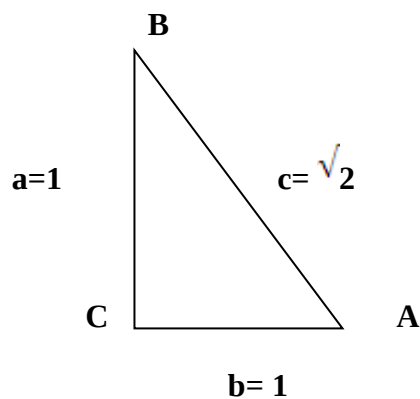


Gráfico 9.6 Valores de los ángulos de 30,45 y 60 grados

ángulo A= ángulo B= 45°

Funciones de los ángulos de 30° y 60°. -

Consideremos en triángulo equilátero, como ABD, entonces, bajemos la perpendicular de BC de B a AD y consideremos el triángulo ABC, entonces:

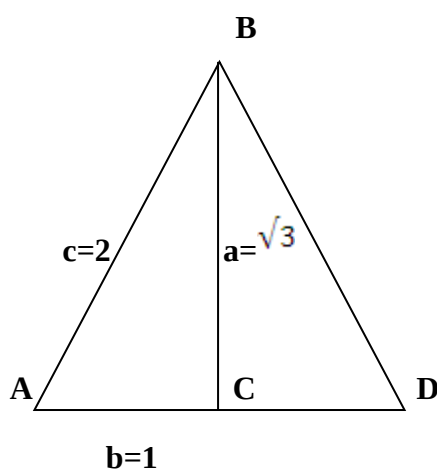


Gráfico 9.7 Triángulo Equilátero

ángulo A= 60°

ángulo B= 30°

De los gráficos anteriores podemos deducir la siguiente tabla con funciones

Ángulo	sen	Cos	tg	ctg	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Tabla 9.1 Funciones trigonométricas de ángulos de 30, 45 y 60 grados:

Ejemplos:**Sumar:**

$$\text{sen}30^\circ + \text{cos}60^\circ =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}45^\circ + \text{sen}60^\circ =$$

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

Restar:

$$\sec 45^\circ - \text{ctg } 60^\circ =$$

$$\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 30^\circ - \text{sen } 45^\circ =$$

$$2 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$$

TALLER**Resolver los siguientes ejercicios:**

$$\csc 30^\circ + \sec 60^\circ$$

$$\csc 60^\circ + \text{sen } 45^\circ$$

$$\text{sen } 60^\circ + \text{tg } 60^\circ$$

$$\cos 60^\circ + \text{ctg } 45^\circ$$

$$\text{sen } 30^\circ - \text{tg } 45^\circ$$

$$\text{sen } 45^\circ - \sec 30^\circ$$

$$\cos 45^\circ - \cos 60^\circ$$

$$\text{ctg } 30^\circ - \text{ctg } 60^\circ$$

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{csc} a = 1$$

$$\operatorname{csc} a = 1 / \operatorname{sen} a$$

$$\operatorname{sen} a = 1 / \operatorname{csc} a$$

$$\cos a \cdot \sec a = 1$$

$$\sec a = 1 / \cos a$$

$$\cos a = 1 / \sec a$$

$$\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} a = 1$$

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{sen} a / \cos a$$

$$\operatorname{ctg} a = \cos a / \operatorname{sen} a$$

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$$

$$\cos^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a$$

$$\sec^2 a = 1 + \operatorname{tg}^2 a$$

$$\operatorname{csc}^2 a = 1 + \operatorname{ctg}^2 a$$

$$\operatorname{tg} a = 1 / \operatorname{ctg} a$$

$$\operatorname{sen} a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$$

$$\cos a = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a}$$

$$\operatorname{tg} a = \sqrt{\sec^2 a - 1}$$

$$\operatorname{ctg} a = \sqrt{\operatorname{csc}^2 a - 1}$$

$$\sec a = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\operatorname{csc} a = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 a}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una Identidad Trigonométrica es una igualdad que contiene funciones trigonométricas y que es verdadera para todos los ángulos para los cuales están definidas estas funciones. **(Torres, L., 2017)**
(García, E., 2015)

Consideremos dos métodos de demostración de identidades dadas:

podemos reducir un miembro a la forma del otro miembro, usando identidades conocidas. En general, el miembro más complicado es reducido a la forma del miembro más sencillo.

Podemos reducir ambos miembros, usando identidades conocidas, a la misma expresión. Entonces, como los miembros son idénticos a una misma expresión, son idénticos entre sí.

Ejemplos:

$$\cos a \cdot \operatorname{tg} a = \operatorname{sen} a$$

Solución:

Como la $\operatorname{tg} a = \operatorname{sen} a / \cos a$, este valor remplazamos, y nos quedaría

$$\cos a \cdot \operatorname{sen} a / \cos a = \operatorname{sen} a$$

Luego simplificamos $\cos a$ y $\cos a$, entonces

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} a$$

Y llegamos a la igualdad.

$$\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 a$$

$$(1 - \operatorname{sen}^2 a) - \operatorname{sen}^2 a = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 a$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 a$$

$$1 - 2 \operatorname{sen}^2 a = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 a$$

$$(1 + \operatorname{ctg}^2 a) \cdot \operatorname{sen}^2 a = 1$$

$$\operatorname{csc}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 a = 1$$

$$1 / (\operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 a) = 1$$

$$1 = 1$$

TALLER

$$\sec^2 a + \tan^2 a = \sec^2 a$$

$$\tan a + \cot a = \sec a \cdot \csc a$$

$$\sec^2 a + \csc^2 a = \sec^2 a \cdot \csc^2 a$$

$$\sin a \cdot \sec a = \tan a$$

$$\cot^2 a - \cos^2 a = \cot^2 a \cdot \cos^2 a$$

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Triángulo oblicuángulo: cuando no tiene un ángulo interior recto (90°), y la suma de sus tres ángulos es igual a 180° .

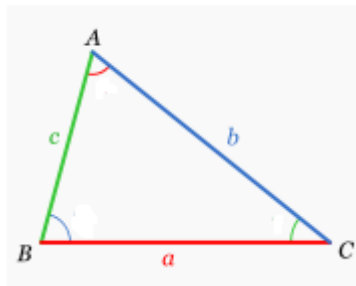


Gráfico 9.7 Triángulo Oblicuángulo

LEY DE SENOS

Si en un triángulo ABC, las medidas de los lados opuestos a los ángulos A, B y C son respectivamente a, b, c, entonces (Torres, L., 2017)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

LEY DE COSENOS

Dado un triángulo ABC, siendo A, B y C los ángulos, y a, b, c, los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces. (Torres, L., 2017)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Ejemplos:

Resolver los siguientes ejercicios:

1.

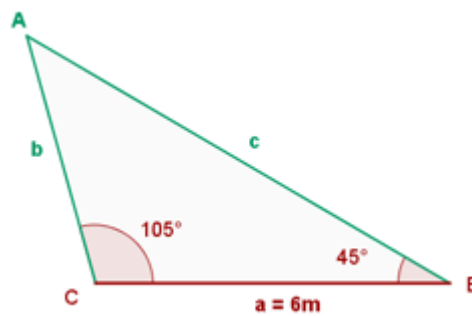


Gráfico 9.8 Triángulo Oblicuángulo para cálculo de la Ley de los Senos

$$A = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ$$

$$\frac{6}{\sen 30^\circ} = \frac{b}{\sen 45^\circ} \quad b = 6 \cdot \frac{\sen 45^\circ}{\sen 30^\circ} = 8.48 \text{ m.}$$

$$\frac{6}{\sen 30^\circ} = \frac{c}{\sen 105^\circ} \quad c = 6 \cdot \frac{\sen 105^\circ}{\sen 30^\circ} = 11.6 \text{ m}$$

2.

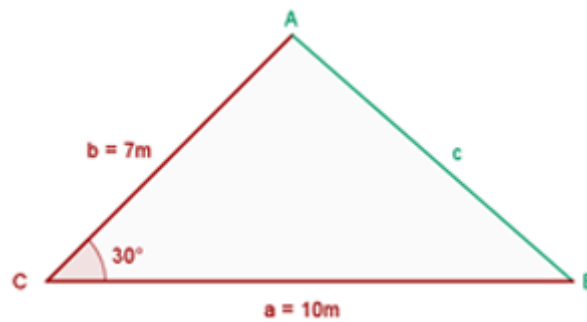


Gráfico 9.9 Resolución de triángulos mediante la Ley de los Senos

$$c = \sqrt{10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cos 30^\circ} = 5.27 \text{ m}$$

$$\frac{7}{\sin B} = \frac{5.27}{\sin 30^\circ} \quad \sin B = 0.664$$

$$B = 41^\circ$$

$$A = 180^\circ - 30^\circ - 41^\circ$$

$$A = 109^\circ$$

3.

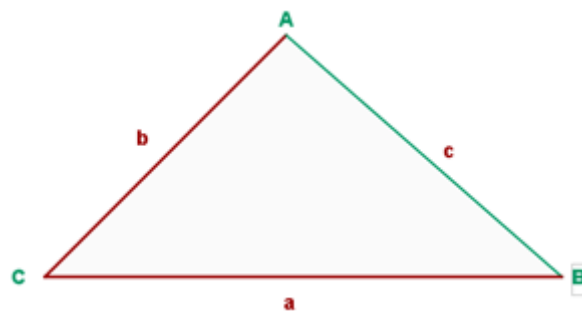


Gráfico 9.10 Resolución de triángulos mediante la Ley de los Cosenos

Resuelve el triángulo de datos: $a = 15 \text{ m}$, $b = 22 \text{ m}$ y $c = 17 \text{ m}$.

$$\cos A = \frac{484 + 289 - 225}{748} = 0.7326 \quad A = 42^\circ$$

$$\cos B = \frac{289 + 225 - 484}{510} = 0.588 \quad B = 86^\circ$$

$$180^\circ - 42^\circ - 86^\circ = C = 52^\circ$$

TALLER

Resolver un triángulo si se conoce que:

$$A = 30.28^\circ; a = 15\text{m}; b = 20\text{m}.$$

$$B = 77.1^\circ; b = 18.69\text{m}; A = 51.45^\circ$$

$$b = 30\text{m}; c = 8\text{m}; A = 120^\circ$$

$$a = 4\text{m}; b = 6\text{m}; c = 7\text{m}.$$

$$A = 35^\circ; B = 100^\circ; C = 45^\circ$$

$$a = 18\text{m}; b = 15\text{m}; c = 31\text{m}$$

$$a = 28\text{cm}; b = 43\text{cm}; A = 52^\circ$$

$$A = 80^\circ; B = 50^\circ; C = 50^\circ$$

CAPÍTULO X

INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA

La estadística se puede definir como la ciencia que recopila, organiza, analiza e interpreta la información numérica o cualitativa, mejor conocida como datos, de manera que pueda llevar a conclusiones válidas. (García, E., 2015)

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las medidas de tendencia central son la media, la mediana y la moda.

MEDIDAS ESTADÍSTICAS

En Estadística existen dos tipos de medidas: las de posición y las de dispersión

MEDIDAS DE POSICIÓN

Las medidas de posición son de dos clases: Las de tendencia central y las que no lo son:

a) Medidas de Tendencia Central. - Se conoce como medidas de tendencia central aquellas cuyos valores se localizan hacia el centro, como: La media aritmética, la mediana y la moda.

b) Las medidas que no se localizan al centro: Son: los deciles, los cuartiles y los percentiles.

1.- MEDIA ARITMÉTICA.

Más conocida como promedio, es un parámetro de tendencia central que mide el centro de gravedad de una distribución de datos. Pero no representa el punto medio, sino el punto equilibrio se simboliza con $\bar{X}$ o $\bar{Y}$ o $\bar{M}$. (García, E., 2015)

a) La media aritmética es la suma de todos los valores dados para el número de datos:

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

Los aportes de un estudiante en Matemáticas son: 18, 14, 15, 20, 14. Calcular la media aritmética

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{18 + 14 + 15 + 20 + 14}{5} = \frac{81}{5} = 16,2$$

b) La media aritmética en una distribución de frecuencias viene dada por la fórmula

$$X = \frac{\sum x.f}{N}$$

x	f	x.f
14	3	42
15	5	75
16	6	96
17	5	85
18	6	108
19	6	114
20	4	80
	35	600

Tabla 10.1 Distribución De frecuencias

$$X = \frac{\sum x.f}{N} = \frac{600}{35} = 17.14$$

b) La media aritmética con datos agrupados viene dada por la fórmula:

(I - S)	(f)	Xm	Xm . f
150 - 152	9	151	1359
153 - 155	11	154	1694
156 - 158	13	157	2041
159 - 161	7	160	1120
162 - 164	20	163	3260
Sumatoria	60		9474

Tabla 10.2 Distribución De frecuencias de Datos Agrupados

$$X = \frac{\sum Xm.f}{N} = \frac{9474}{60} = 157,9$$

2.- MEDIANA

Es otro parámetro de tendencia central que se encuentra situado en el punto medio o central de un conjunto de datos dispuestos en forma ordenada. (García, E., 2015)

Cálculo de la Mediana:

Para calcular la mediana es necesario ordenar las observaciones ascendentes o descendentes.

Se consideran dos cosas:

a). - Cuando el número de observaciones es impar: en tal caso, la mediana es la observación central
Ejemplo:

Hallar la mediana de las siguientes observaciones: 8,2,5,3,4,6,2,7,9,11,13,6,2,5,4,16,10

Ordenación en forma ascendente: 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 13, 16

Me = 6

b). - Cuando el número de observaciones es par: en tal caso la mediana es el promedio de las dos observaciones centrales Ejemplo:

Hallar la mediana de la serie: 30, 36, 25, 28, 46, 50, 83, 75, 48, 60

Ordenación en forma ascendente: 25, 28, 30, 36, 46, 48, 50, 60, 75, 83

$$Me = \frac{46 + 48}{2} = 47$$

c). - La mediana con datos agrupados viene dado por la fórmula:

$$Me = Li + \frac{\left(\frac{N}{2} - \sum f\right)}{fm} \cdot c$$

Donde:

Li: límite inferior de la clase mediana

N: número total de datos

$\sum f$: sumatoria de las frecuencias anteriores a la clase mediana

fm: frecuencia de la clase mediana

c: longitud del intervalo de la clase mediana

(I - S)	(f)
150 - 152	9
153 - 155	11
156 - 158	13
159 - 161	7
162 - 164	20
Σ	60

Tabla 10.3 Longitud del intervalo de la clase mediana

$$Me = 156 + \frac{\left(\frac{60}{2} - 20\right)}{13} \cdot 13 = 158.31$$

3.- MODA

Es el valor que se repite con mayor frecuencia en un conjunto de datos. (García, E., 2015)

Cálculo de la Moda:

Ejemplo 1.- Determine la moda de los siguientes datos: 5, 4, 3, 2, 4, 9, 7, 8, 4

$$Mo = 4$$

Ejemplo 2.- Determine la moda de los siguientes datos: 10, 12, 15, 10, 15, 13, 10, 16, 11, 15

$$Mo = 10 \text{ y } 15 \text{ por lo tanto la serie es bimodal}$$

Ejemplo 3.- Determine la moda de los siguientes datos: 28, 30, 25, 42, 34, 28, 27, 25, 58, 41, 42, 25, 28, 42

$$Mo = 25, 28 \text{ y } 42 \text{ por lo tanto la serie es trimodal}$$

c).- La moda para datos agrupados en una distribución de frecuencias, es posible aproximar la moda usando el punto medio de la clase que contiene el mayor **número de frecuencias de clase**.

(I - S)	(f)
150 - 152	9
153 - 155	11
156 - 158	13
159 - 161	7
162 - 164	20
Σ	60

Tabla 10.4 Número de frecuencias de clase

Primero seleccionamos el intervalo de clase con mayor número de frecuencias $f = 20$ el intervalo es 162 – 164 por lo tanto la moda será:

$$Mo = \frac{162 + 164}{2} = 163$$

TALLER

A continuación, se propone una serie estadística sin frecuencias, la misma que corresponde a las calificaciones de un estudiante de Matemáticas. Determinar:

El promedio de rendimiento

La mediana

La moda

La siguiente distribución de frecuencias reporta el número de estudiantes registrados en cada uno de los 50 grupos de varios cursos impartidos en

La Escuela de Negocios el verano pasado.

Estudiantes	Frecuencia
0 a 10	3
10 a 20	8
20 a 30	16
30 a 40	10
40 a 50	9
50 a 60	4
Total	50

Tabla 10.5 Frecuencias Escuela de negocios

Determine el número medio de estudiantes por grupo.

$$\bar{X} = \frac{1510}{50} = 30.2$$

Determine el número mediano de estudiantes por grupo.

$$mediana = 20 + \frac{25-11}{16}(10) = 28.75$$

Referencias Bibliográficas

- Gutiérrez, A. (2012). Fundamentos de matemáticas aplicadas. Aplicaciones Matemáticas.
- Hernández, J. (2016). Teoría de números. Numérica.
- Jiménez, I. (2020). Lógica matemática: Fundamentos y teoremas. Logi Math.
- Martínez, A. (2010). Álgebra para principiantes. Matemática Moderna.
- Molina, J. (2018). Teoría de conjuntos: Principios y aplicaciones. Conjuntos.
- Ortega, L. (2016). Álgebra lineal: Métodos y resultados. Lineal.
- Reyes, S. (2019). Análisis real: Conceptos y demostraciones. Real Analysis.
- Sánchez, R. (2012). Geometría analítica: Teoría y aplicaciones. Geometría.
- Torres, L. (2017). Trigonometría: conceptos y problemas resueltos. Trigonométricas.
- Vargas, M. (2019). Topología: Una introducción moderna. Topológicas.
- García, E. (2015). Probabilidades y Estadística. Estadísticas.



ISBN: 978-9942-621-64-1

